

# BAKİ UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

---

---

ВЕСТНИК  
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

---

---

NEWS  
OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT  
*elmləri seriyası*

---

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК  
*series of*

---

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 3, 2021

**Bakı – 2021**

## RİYAZİYYAT

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35

ЗАДАЧА СТЕКЛОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО  
ТИПА ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОЙ ПОЛОСЕ  
ШИРИНЫ ЕДИНИЦЫ

<sup>1</sup>М.Ф.МЕХТИЕВ, <sup>2</sup>Н.А.АЛИЕВ,  
<sup>3</sup>Л.Ф.ФАТУЛЛАЕВА, <sup>4</sup>Л.Г.ХАЛИЛОВА  
<sup>1,2,3</sup>Бакинский Государственный Университет,  
<sup>4</sup>Российский Университет Транспорта (РУТ МИИТ)  
<sup>1,2,3</sup>laura\_fat@rambler.ru  
<sup>4</sup>kvm\_miit@mail.ru

*Данная статья посвящена исследованию решений граничной задачи для уравнения гиперболического типа первого порядка на плоской полосе единичной ширины с глобальными (интегральными) граничными условиями. С помощью необходимых условий, поставленная задача сводится к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, которая исследуется в случае вырожденности ядра.*

**Ключевые слова:** задача Стеклова, спектральная задача, фундаментальное решение, интегральное граничное условие, необходимое условие, собственные значения, собственные функции.

**Введение.** Как известно, граничная задача в основном рассмотрена как для обыкновенного дифференциального уравнения [1], так и для уравнения с частными производными эллиптического типа [2]. Далее были рассмотрены граничные задачи как для параболического типа уравнений [3], так и для уравнения гиперболического типа [4].

После этих трех типов уравнения с частными производными появились уравнение смешанного типа, уравнение составного типа и наконец, уравнение смешанного-составного типа. Граничная задача для таких типов уравнений рассмотрены А.В.Бицадзе, его учениками [5]-[7] и нами [8]-[10].

Представленная работа посвящена исследованию решений граничной задачи для однородного уравнения гиперболического типа первого порядка с глобальными (интегральными членами) однородными граничными условиями, содержащиеся спектральный параметр  $\lambda \in C$ .

Исходя из полученных необходимых условий, заданное глобаль-

ное граничное условие сводится к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, которое содержит спектральный параметр. В случае вырожденности ядра находятся собственные значения и собственные функции как интегрального уравнения, так и поставленной граничной задачи.

**Постановка задачи.** Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + a \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 \in R, \quad x_2 \in (0,1), \quad (1)$$

$$\begin{cases} \lambda u(x_1, 0) + \int_R K(x_1, t) u(t, 1) dt = 0, & x_1 \in R, \\ \lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $a \in R$  - заданная постоянная,  $\lambda \in C$  - спектральный параметр,  $K(x, t)$  - заданная непрерывная функция,  $u(x) = u(x_1, x_2)$  - искомая функция.

Легко видно, что

$$U(x - \xi) = \theta(x_2 - \xi_2) \delta(x_1 - \xi_1 - a(x_2 - \xi_2)) \quad (3)$$

является фундаментальное решение уравнения (1),

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4)$$

- единичная функция Хевисайда, а  $\delta(z)$  - функция Дирака с комплексным аргументом.

Известно, что

$$\theta'(t) = \delta(t), \quad (5)$$

и для любой регулярной функции  $f(x)$

$$f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x). \quad (6)$$

**Основное соотношение.** Умножая уравнение (1) на фундаментальное решение (3), интегрируя по области  $D = \{x: x_1 \in R, x_2 \in (0,1)\}$  и применяя формулу Остроградского-Гаусса (интегрирование по частям), получим:

$$\begin{aligned} D &= \int_R dx_1 \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} U(x - \xi) dx_2 + a \int_0^1 dx_2 \int_R \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} U(x - \xi) dx_1 = \\ &= \int_R dx_1 \left[ u(x) U(x - \xi) \Big|_{x_2=0}^1 - \int_0^1 u(x) \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_2} dx_2 \right] + \\ &+ a \int_0^1 dx_2 \left[ u(x) U(x - \xi) \Big|_{x_1=-\infty}^{\infty} - \int_R u(x) \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_1} dx_1 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_2} + a \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_1} = \delta(x - \xi) = \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2), \quad (8)$$

из (7) получаем следующее основное соотношение:

$$\int_R u(x_1, 1) \theta(1 - \xi_2) \delta(x_1 - \xi_1 - a(1 - \xi_2)) dx_1 - \\ - \int_R u(x_1, 0) \theta(-\xi_2) \delta(x_1 - \xi_1 + a\xi_2) dx_1 = \begin{cases} u(\xi), \xi \in D, \\ \frac{1}{2} u(\xi), \xi \in \partial D. \end{cases} \quad (9)$$

Как видно из основного соотношения (9), оно состоит из двух частей, первая часть, когда  $\xi \in D$ , дает нам любое решение уравнения (1), определенное в области  $D$ , вторая часть, когда  $\xi \in \partial D$ , дает необходимые условия, связанные с задачей (1)-(2), т.е. каждое решение (собственная функция) граничной задачи (1)-(2) удовлетворяет этим условиям.

**Необходимые условия.** Отделяя их из основного соотношения (9), имеем:

$$\frac{1}{2} u(\xi_1, 0) = \int_R u(x_1, 1) \delta(x_1 - \xi_1 - a) dx_1 - \frac{1}{2} u(\xi_1, 0), \\ \frac{1}{2} u(\xi_1, 1) = \frac{1}{2} u(\xi_1, 1).$$

Так как второе необходимое условие превращается к тождеству, то из первого получим:

$$u(\xi_1, 0) = u(\xi_1 + a, 1), \xi_1 \in R. \quad (10)$$

С этим установлен следующий факт.

**Теорема 1.** Пусть  $a \in R$  заданное постоянное число. Если  $\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0$ , то каждое решение уравнения (1), определенное в области  $D$ , удовлетворяет необходимым условиям (10).

**Фредгольмовость.** Исходя из необходимых условий (10), имеем:

$$u(t, 1) = u(t - a, 0), t \in R.$$

С помощью этого выражения из граничного условия (2), получим:

$$\lambda u(x_1, 0) + \int_R K(x_1, t) u(t - a, 0) dt = 0.$$

При  $t - a = \tau$  находим:

$$\lambda u(x_1, 0) + \int_R K_1(x_1, \tau) u(\tau, 0) d\tau = 0, x_1 \in R, \quad (11)$$

где  $K_1(x_1, \tau) = K(x_1, \tau + a)$ .

Итак, поставленная граничная задача Стеклова (1)-(2) сведена к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода со спектральным параметром  $\lambda \in C$  относительно функции  $u(x_1, 0)$ .

**Теорема 2.** При условии теоремы 1, если  $K(x_1, t)$  непрерывная функция своих аргументов, тогда поставленная граничная задача (1)-(2) сводится к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода со спектральным параметром  $\lambda \in C$ .

**Вырожденное ядро.** Пусть ядро интегрального уравнения (11) имеет вид:

$$K_1(x_1, \tau) = \sum_{j=1}^n P_j(x_1) Q_j(\tau), \quad (12)$$

тогда (11) примет вид:

$$\lambda u(x_1, 0) + \sum_{j=1}^n P_j(x_1) \int_R Q_j(\tau) u(\tau, 0) d\tau = 0. \quad (11')$$

Принимая обозначения

$$C_j = \int_R Q_j(\tau) u(\tau, 0) d\tau, \quad j = \overline{1, n}, \quad (13)$$

получим:

$$u(x_1, 0) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n C_j P_j(x_1). \quad (14)$$

Значит, с этим определено решение интегрального уравнения (11) в виде (14), где постоянные  $C_j$  зависят от неизвестной функции  $u(\tau, 0)$ .

Теперь, исходя из (14) определим  $C_j$ , т.е.

$$\begin{aligned} C_j &= \int_R Q_j(\tau) u(\tau, 0) d\tau = \int_R Q_j(\tau) \left[ -\frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^n C_m P_m(\tau) \right] d\tau = \\ &= -\frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^n C_m \int_R P_m(\tau) Q_j(\tau) d\tau \end{aligned}$$

или

$$\lambda C_j + \sum_{m=1}^n C_m A_{jm} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (15)$$

где

$$A_{jm} = \int_R P_m(\tau) Q_j(\tau) d\tau, \quad m, j = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Из однородного алгебраического уравнения (15) получаем:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \lambda + A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & \lambda + A_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Пусть корни уравнения (17) разные, т.е.

$$\lambda_k \neq \lambda_s, \quad \text{если } k \neq s. \quad (18)$$

Тогда  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , являются собственными числами как для алгебраической системы (15), так и для интегрального уравнения (11').

При условии (17) собственный вектор

$$C(k) = (C_1(k) \ C_2(k) \ \dots \ C_n(k))^T \quad (19)$$

определяется из системы линейных алгебраических уравнений (15) со соответствующим собственным значением  $\lambda_k$ , а собственная функция интегрального уравнения (11')  $u_k(x_1, 0)$  получается с помощью (14) с учетом собственных значения (18) и собственный вектор (19).

**Заключение.** Таким образом, имеют место следующие теоремы:

**Теорема 3.** При условиях теорем 1 и 2, если имеет место условие

(12), тогда собственные значения интегрального уравнения (11) получаются из уравнения (17), а если имеет место условие (18), тогда собственные функции  $u_k(x_1, 0)$  имеет вид (14).

**Теорема 4.** При условиях теорем 1-3 собственные числа граничной задачи (1)-(2) определяются из уравнения (17), а собственные функции получаются из основного соотношения (9) в виде

$$u_k(\xi) = u_k(\xi_1 + a(1 - \xi_2), 1) = u_k(\xi_1 - a\xi_2, 0).$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. ИЛ, М., 1962, 352 с.
2. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966, 204 с.
3. Aliev N.A., Hosseini S.M. An analysis of a parabolic problem with a general (non-local and global) supplementary linear conditions. Italian Journal of pure and applied mathematics, №12, 2002, pp.143-154.
4. Алиев Н.А., Алыгулиев Р.М. Граничная задача для уравнения гиперболического типа. Спектральная теория дифференциальных операторов (Тематический сборник научных трудов). АГУ им. С.М.Кирова, Баку, 1984, с. 3-9.
5. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. Изд. АН СССР, 1959, 180 с.
6. Лаврентьев М.А., Бицадзе А.В. К проблемам уравнений смешанного типа. Докл. АН СССР, 1950, т.70, с. 373-376.
7. Бицадзе А.В., Салахатдинов М.С. К теории уравнений смешанного-составного типа. Сиб. мат. журнал, 1961, т.2, №1, с. 7-9.
8. Алиев Н.А., Мамедов Ф.О. Задача смешанного типа для одного модельного уравнения первого порядка. Изв. АН Азерб.ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1983, №6, с. 110-113.
9. Delshad Gharehgheshlaghi A.Y., Aliev N.A. On Fredholm property of boundary value problems for a composite type model equation with general boundary conditions. International Journal of Computer Mathematics, Great Britain, London, Taylor & Francis, 2011, pp. 124-135.
10. Нифтуллаева Ш.А., Ибрагимов Н.С., Алиев Н.А. Исследование решений граничной задачи для уравнения смешанно-составного типа. Journal of Baku Engineering University, Mathematics and Computer science, 2018, v.2, №2, pp. 78-84.

### ENİ VAHİD OLAN MÜSTƏVİ ZOLAQDA BİRİNCİ TƏRTİB HİPERBOLİK TİP TƏNLİK ÜÇÜN STEKLOV MƏSƏLƏSİ

M.F.MƏHDİYEV, N.Ə.ƏLİYEV, L.F.FƏTULLAYEVA, L.H.XƏLİLOVA

#### XÜLASƏ

Təqdim olunan məqalə eni vahid olan müstəvi zolaqda birinci tərtib hiperbolik tip tənlik üçün sərhəd məsələsinin qlobal (inteqral) sərhəd şərtləri daxilində həllinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Zəruri şərtlərin köməyiylə baxılan məsələ ikinci növ bircins Fredholm inteqral tənliyinə gətirilir, bu zaman məsələ cırılmış nüvə halı üçün araşdırılır.

**Açar sözlər:** Steklov məsələsi, spektral məsələ, fundamental həll, inteqral sərhəd şərti, zəruri şərt, məxsusi qiymətlər, məxsusi funksiyalar.

**THE STEKLOV PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION  
OF THE FIRST ORDER ON A PLANE UNIT WIDTH BAND**

**M.F.MEKHTIYEV, N.A.ALIYEV, L.F.FATULLAEVA, L.H.KHALILOVA**

**SUMMARY**

This article is devoted to the study of solutions to the boundary value problem for a first-order hyperbolic equation on a flat strip of unit width with global (integral) boundary conditions. With the help of the necessary conditions, the problem is reduced to a homogeneous Fredholm integral equation of the second kind, which is investigated in the case of degeneracy of the kernel.

**Keywords:** Steklov problem, spectral problem, fundamental solution, integral boundary condition, necessary condition, eigenvalues, eigenfunctions.

УДК 517.91

## О ФОРМУЛЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА

<sup>1,2</sup>А.Х.ХАНМАМЕДОВ, <sup>1</sup>М.Ф.МУРАДОВ

<sup>1</sup>Бакинский Государственный Университет

<sup>2</sup>Институт Математики и Механики НАН Азербайджана  
*agil\_khanmamedov@yahoo.com*

*Рассмотрено модифицированное уравнение Бесселя. С помощью спектральной теории одномерного оператора Шредингера с экспоненциальным потенциалом доказано свойство ортогональности модифицированных функций Бесселя первого рода.*

**Ключевые слова:** уравнение Бесселя, функция Макдональда, уравнение Шредингера, формула разложения.

### Введение и основной результат

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y'' + e^{2x}y = \lambda^2 y, \quad -\infty < x < +\infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Если мы положим  $x = \ln z$ ,  $y(\ln z) = u(z)$ ,  $v = i\lambda$ , то уравнение (1) примет вид

Рассмотрим модифицированное уравнение Бесселя

$$z^2 u'' + zu' - (z^2 + v^2)u = 0. \quad (1)$$

Хорошо известно, что одним из решений уравнения (1) является функция Макдональда  $K_\nu(z)$ , которая обладает асимптотикой (см. [1]–[5])

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left( 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Следует отметить, что в математических литературах исследованы различные свойства функции  $K_\nu(z)$  (см. [1]–[7] и библиографию к ним). Настоящая работа посвящена свойствам ортогональности функций вида  $K_{i\alpha}(e^x)$ . При этом полученные результаты могут быть использованы для изучения спектральной теории одномерных операторов Шредингера с дополнительным экспоненциальным потенциалом. Основным результатом данной работы является следующая

**Теорема.** *Справедлива формула разложения*

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \operatorname{sh} \pi \lambda K_{i\alpha}(x) K_{i\alpha}(y) d\lambda = \delta(x - y), \quad (3)$$

где  $\delta$  - дельта функция Дирака.



### Доказательство теоремы

Если мы положим  $z = e^x, y(x) = u(e^x), v = i\sqrt{\lambda}$ , то уравнение (1) примет вид

$$-y'' + e^{2x}y = \lambda y, -\infty < x < +\infty, \lambda \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Отсюда и из (2) следует, что уравнение (4) имеет специальные решения с асимптотиками

$$f(x, \lambda) = K_{i\sqrt{\lambda}}(e^x) = \sqrt{\frac{\pi}{2e^x}} e^{-e^x} (1 + O(e^{-x})), x \rightarrow +\infty, \quad (5)$$

В силу известного представления [2]

$$K_{i\sqrt{\lambda}}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zht} \cos \sqrt{\lambda} t dt, |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbb{C} \quad (6)$$

закключаем, что при каждом фиксированном  $x$  решение  $f(x, \lambda)$  является целой функцией от  $\lambda$ . Далее, известно, что (см.) уравнение (1) имеет также решение  $I_\nu(z)$  с асимптотикой

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Gamma^{-1}(\nu + 1) (1 + o(1)), z \rightarrow 0,$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – Гамма функция Эйлера. Пусть  $\Gamma$  – комплексная  $\lambda$ -плоскость с разрезом по положительной полуоси. В плоскости  $\Gamma$  рассмотрим функцию  $\sqrt{\lambda}$ , выбирая аналитическую ветвь радикала такую, что  $\sqrt{\lambda + i0} > 0$  при  $\lambda > 0$ . Из последних рассуждений следует, что функция

$$g(x, \lambda) = 2^{-i\sqrt{\lambda}} \Gamma(1 - i\sqrt{\lambda}) I_{-i\sqrt{\lambda}}(e^x) = e^{-i\sqrt{\lambda}x} (1 + o(1)), x \rightarrow -\infty \quad (7)$$

является решением Йоста уравнения (4). Из общей теории [8] вытекает, что при положительных значениях  $\lambda$  решением уравнения (4) является также функция  $\overline{g(x, \lambda)}$ . Более того, при  $\lambda > 0$  эти решения линейно независимы, так как их вронскиан

$$W\{f(x, \lambda), \overline{f(x, \lambda)}\} = f(x, \lambda) \overline{f'(x, \lambda)} - f'(x, \lambda) \overline{f(x, \lambda)}$$

равен  $2i\sqrt{\lambda}$ .

Вычислим также вронскиан решений  $f(x, \lambda)$  и  $g(x, \lambda)$ . Известно [2], что  $W\{K_\nu(z), I_{-\nu}(z)\} = \frac{1}{z}$ . Отсюда следует, что  $W\{K_{i\sqrt{\lambda}}(e^x), I_{-i\sqrt{\lambda}}(e^x)\} = 1$ . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} W\{f(x, \lambda), g(x, \lambda)\} &= W\{K_{i\sqrt{\lambda}}(e^x), 2^{-i\sqrt{\lambda}} \Gamma(1 - i\sqrt{\lambda}) I_{-i\sqrt{\lambda}}(e^x)\} \\ &= 2^{-i\sqrt{\lambda}} \Gamma(1 - i\sqrt{\lambda}) \end{aligned} \quad (8)$$

Кроме того, из (6) получаем, что функция  $f(x, \lambda)$  принимает действительные значения при  $\lambda > 0$ . Так как решения  $g(x, \lambda)$  и  $\overline{g(x, \lambda)}$  линейно независимы при  $\lambda > 0$ , то имеет место тождество

$$f(x, \lambda) = a(\lambda) \overline{g(x, \lambda)} + \overline{a(\lambda)} g(x, \lambda), \quad (9)$$

где коэффициент  $a(\lambda)$  определяется формулой

$$a(\lambda) = \frac{2^{-i\sqrt{\lambda}} \Gamma(1 - i\sqrt{\lambda})}{2i\sqrt{\lambda}}. \quad (10)$$

В пространстве  $L_2(-\infty, +\infty)$  рассмотрим самосопряженный оператор  $L$ , порожденный левой частью уравнения (4). Как показано в [9], непрерывный спектр оператора  $L$  заполняет положительную полуось. Ввиду положительности потенциала  $q(x) = e^{2x}$  дискретный спектр оператора  $L$  отсутствует. Наша цель - получить формулу разложения по собственным функциям непрерывного спектра оператора  $L$  невозмущенного оператора. В связи с этим рассмотрим уравнение

$$-y'' + e^{2x}y - \lambda y = h(x),$$

где  $h(x)$  - произвольная функция из  $L_2(-\infty, \infty)$ , для которой нужно получить разложение. Следуя соответствующим рассуждениям Э.Ч.Титчмарша [10], получаем, что соответствующая функция Грина  $G(x, y, \lambda)$  имеет вид

$$G(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{f(x, \lambda)g(y, \lambda)}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)}, & y \leq x, \\ \frac{g(x, \lambda)f(y, \lambda)}{2i\sqrt{\lambda}a(\lambda)}, & y > x \end{cases} \quad (11)$$

Согласно последнему равенству  $G(x, y, \lambda)$  является аналитической функцией в плоскости  $\Gamma$ . Положим

$$\Phi(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, \lambda) h(y) dy.$$

Тогда будем иметь

$$h(x) = -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, \lambda + i0) d\lambda,$$

$$h(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, \lambda - i0) d\lambda.$$

Учитывая, что  $\Phi(x, \lambda + i0) = \Phi(x, \lambda - i0)$ ,  $\lambda < 0$  и  $\Phi(x, \lambda + i0) = \overline{\Phi(x, \lambda - i0)}$ ,  $\lambda > 0$ , получим

$$h(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Im} \Phi(x, \lambda + i0) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re} \{i\Phi(x, \lambda + i0)\} d\lambda.$$

Используя соотношения (9), (11) и учитывая, что

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left\{ \left[ \overline{g(y, \lambda)} + r(\lambda)g(y, \lambda) \right] g(x, \lambda) \right\} = \\ & = \text{Re} \left\{ \left[ \overline{g(x, \lambda)} + r(\lambda)g(x, \lambda) \right] g(y, \lambda) + \left[ \overline{g(y, \lambda)}g(x, \lambda) - \overline{g(x, \lambda)}g(y, \lambda) \right] \right\} = \\ & = \text{Re} \left\{ \left[ \overline{g(x, \lambda)} + r(\lambda)g(x, \lambda) \right] g(y, \lambda) \right\}, r(\lambda) = \frac{\overline{a(\lambda)}}{a(\lambda)}, \end{aligned}$$

получаем следующую формулу разложения

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \text{Re} \left\{ \left[ \overline{g(x, \lambda)} + r(\lambda)g(x, \lambda) \right] g(y, \lambda) \right\} dy d\lambda.$$

Последнее равенство перепишем в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{Re} \left\{ \left[ \overline{g(x, \lambda)} + r(\lambda)g(x, \lambda) \right] g(y, \lambda) \right\} d\lambda = \delta(x - y),$$

где  $\delta$ - дельта функция Дирака. Так как в силу (9) верно равенство  $\overline{g(x, \lambda)} + r(\lambda)g(x, \lambda) = \frac{f(x, \lambda)}{a(\lambda)}$ , а функция  $f(x, \lambda)$  принимает действительные значения при  $\lambda > 0$ , то имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f(x, \lambda) \operatorname{Re} \left\{ \frac{g(y, \lambda)}{a(\lambda)} \right\} d\lambda = \delta(x - y).$$

С другой стороны, из той же формулы (9) следует, что

$$\frac{g(y, \lambda)}{a(\lambda)} + \frac{\overline{g(y, \lambda)}}{\overline{a(\lambda)}} = \frac{f(y, \lambda)}{|a(\lambda)|^2}.$$

Из двух последних формул найдем, что

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{|a(\lambda)|^2 \sqrt{\lambda}} f(x, \lambda) f(y, \lambda) d\lambda = \delta(x - y).$$

Используя (10) и принимая во внимание, что  $|\Gamma(1 - i\lambda)|^2 = \frac{\pi\lambda}{sh\pi\lambda}$  окончательно получим

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} sh\pi\sqrt{\lambda} f(x, \lambda) f(y, \lambda) d\lambda = \delta(x - y).$$

Следует отметить, что сходимость последних интегралов обеспечиваются оценками для функции  $K_{i\lambda}(z)$ , полученными в работах [6],[7]. Заменяя в последней формуле  $\sqrt{\lambda}$  на  $\lambda$ , получаем формулу (3). Тем самым завершается доказательство теоремы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Polya G. On the zeros of certain trigonometric integrals// J. of London Math. Soc., 1926, v.1, N2, p.98-99.
2. Abramowitz V., Stegun I. N. (eds.) Handbook of mathematical functions, 10th edit., Applied Mathematical series, 55, National Bureau of Standards, Washington; Dover Publications, Inc., New York, 1964 (Пер. В.А.Диткин, Л.Н.Кармазина (ред.). Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
3. Грей Э., Мэтьюз Г.Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, М.: Иностранная Литература, 1953.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
5. Керимов М. К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014, т.54, №9, с. 1387–1441.
6. R.B. Paris, Hadamard Expansions and Hyperasymptotic Evaluation, Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol. 141, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
7. N.M. Temme, Steepest descent paths for integrals defining the modified Bessel functions of imaginary order, Methods Appl. Anal., 1994, №1, pp. 14–24.
8. Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев, Наукова Думка, 1977, 332 с.
9. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Спектральная теория одного функционально-разностного оператора конформной теории поля// Изв. РАН. Сер. матем., 2015, т.79, №2,

с. 181–204.

10. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т.1.М., 1960, 278 с.

## **MODİFİKASİYA OLUNMUŞ BESSEL FUNKSİYALARININ ORTOQONALLIĞI HAQQINDA**

**A.X.XANMƏMMƏDOV, M.F.MURADOV**

### **XÜLASƏ**

Modifikasiya olunmuş Bessel tənliyinə baxılmışdır. Eksponensial potensiallı Şredinger operatorunun spektral nəzəriyyəindən istifadə edərək modifikasiya olunmuş birinci növ Bessel funksiyalarının ortoqonallıq xassəsi isbat edilmişdir.

**Açar sözlər:** Bessel tənliyi, Makdonald funksiyası, Şredinger tənliyi, ayrılış düsturu.

## **ON THE ORTHOGONALITY FORMULA OF THE MODIFIED BESSEL FUNCTIONS OF THE FIRST KIND**

**A.Kh.KHANMAMMADOV, M.F.MURADOV**

### **SUMMARY**

A modified Bessel equation is considered. Using the spectral theory of the one-dimensional Schrödinger operator with exponential potential, the orthogonality property of modified Bessel functions of the first kind is proved.

**Keywords:** Bessel equation, Macdonald function, Schrödinger equation, expansion formula.

УДК 517.95

**ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
БУССИНЕСКА ШЕСТОГО ПОРЯДКА  
С ДВОЙНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ****А.С.ФАРАДЖЕВ***Азербайджанский Государственный Педагогический Университет  
a.farajov@mail.ru*

*Исследована одна обратная краевая задача для уравнения Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией с граничными условиями типа Неймана. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.*

**Ключевые слова:** обратная задача, уравнения Буссинеска, существование, единственность, классическое решение.

**Введение**

Уравнение Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией описывает движение волн на воде с поверхностью напряжения и рассмотрено Шнайдером и Юджином в [1]. В [1] было доказано, что предел длинных волн может быть приближенно описан двумя разделенными уравнениями Кавахары для вырожденного случая. Модель также может быть получена из двумерной задачи о водных волнах. Уравнения типа Буссинеска были тщательно изучены, и несколько результатов о существовании, разрушении и энергии распад ее решений был получен в [2–7]

Задачи, в которых вместе с решением того или иного дифференциального уравнения требуется определить также коэффициент (коэффициенты) самого уравнения, или же правую часть уравнения, в математике и в математическом моделировании называют обратными задачами. Теория обратных задач для дифференциальных уравнений представляет собой активно развивающееся направление современной математики. Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах (см., например [7–813]).

В данной статье мы рассматриваем обратную задачу для уравнения

Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией с граничными условиями типа Неймана.

### 1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - u_{xxx}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) + u_{xxxxx}(x,t) = \\ = a(t)u(x,t) + b(t)u_t(x,t) + f(x,t) \end{aligned} \quad (1)$$

в области  $D_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  и поставим для него обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

граничными условиями типа Неймана

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3)$$

и дополнительными условиями

$$u(x_i,t) = h_i(t) \quad (i = 1,2; 0 \leq t \leq T), \quad (4)$$

где  $x_i \in [0,1] (i = 1,2; x_1 \neq x_2)$  – фиксированные числа,  $f(x,t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $h_i(t) (i = 1,2)$  – заданные функции, а  $u(x,t)$ ,  $a(t)$  и  $b(t)$  – искомые функции.

**Определение 1.** Классическим решением задачи (1)-(4) назовём тройку  $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$  функций  $u(x,t)$ ,  $a(t)$  и  $b(t)$ , обладающих следующими свойствами:

- 1) функция  $u(x,t)$  непрерывна в  $D_T$  вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);
- 2) функции  $a(t)$  и  $b(t)$  непрерывны на  $[0, T]$ ;
- 3) уравнение (1) и условия (2)-(4) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi(x) \in C[0,1]$ ,  $\psi(x) \in C[0,1]$ ,  $f(x,t) \in C(D_T)$ ,

$h_i(t) \in C^2[0, T] (i = 1,2)$ ,  $h(t) \equiv h_1(t)h_2'(t) - h_2(t)h_1'(t) \neq 0 (0 \leq t \leq T)$  и выполняются условия согласования

$$\varphi(x_i) = h_i(0), \quad \psi(x_i) = h_i'(0) \quad (i = 1,2). \quad (5)$$

Тогда задача нахождения решения задачи (1)-(4) эквивалентна задаче определения функций  $u(x,t)$ ,  $a(t)$  и  $b(t)$ , обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1)-(4), из (1)-(3) и

$$\begin{aligned} h_i''(t) - u_{xx}(x_i,t) - u_{xxx}(x_i,t) + u_{xxxx}(x_i,t) + u_{xxxxx}(x_i,t) = \\ = a(t)h_i(t) + b(t)h_i'(t) + f(x_i,t) \quad (i = 1,2; 0 \leq t \leq T), \end{aligned} \quad (6)$$

причём

$$h(t) \equiv h_1(t)h_2'(t) - h_2(t)h_1'(t) \quad (0 \leq t \leq T).$$

**Доказательство.** Пусть  $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$  является классическим решением задачи (1)-(4). Далее, так как  $h(t) \in C^2[0, T]$ , дифференцируем (4) два раза по  $t$ , получаем:

$$u_t(x_i,t) = h_i'(t), \quad u_{tt}(x_i,t) = h_i''(t) \quad (i = 1,2; 0 \leq t \leq T). \quad (7)$$

В уравнение (1) подставим  $x = x_i$  ( $i=1,2$ ), находим:

$$\begin{aligned} u_{ii}(x_i, t) - u_{xx}(x_i, t) - u_{xxx}(x_i, t) + u_{xxxx}(x_i, t) + u_{xxxxx}(x_i, t) = \\ = a(t)u(x_i, t) + b(t)u_i(x_i, t) + f(x_i, t) \quad (i=1,2; 0 \leq t \leq T) . \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда, с учетом (4) и (7), легко приходим к выполнению (6).

Теперь, предположим, что  $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$  является решением задачи (1)- (3), (6). Тогда из (6) и (8), имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(x_i, t) - h_i(t)) = a(t)(u(x_i, t) - h_i(t)) + b(t)\frac{d}{dt}(u(x_i, t) - h_i(t)) \quad (0 \leq t \leq T) . \quad (9)$$

В силу  $\varphi(x_i) = h_i(0)$ ,  $\psi(x_i) = h_i'(0)$  ( $i=1,2$ ), находим:

$$\begin{aligned} u(x_i, 0) - h_i(0) = \varphi(x_i) - h_i(0) = 0 , \\ u_i(x_i, 0) - h_i'(0) = \psi(x_i) - h_i'(0) = 0 \quad (i=1,2) . \end{aligned} \quad (10)$$

Из (9), с учетом (10) ясно, что выполняется и условие (4). Теорема доказана.

## 2. Разрешимость обратной краевой задачи

Первую компоненту  $u(x, t)$  решения  $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$  задачи (1)-(3), (6) будем искать в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi) , \quad (11)$$

где

$$u_k(t) = m_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots) ,$$

причём

$$m_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 2, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Тогда, применяя формальную схему метода Фурье, из (1) и (2) получаем:

$$(1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4)u_k''(t) + (\lambda_k^2 + \lambda_k^4)u_k(t) = F_k(t; u, a, b) \quad (0 \leq t \leq T; k = 0, 1, \dots) , \quad (12)$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad u_k'(0) = \psi_k \quad (k = 0, 1, \dots) , \quad (13)$$

где

$$F_k(t; u, a) = f_k(t) + a(t)u_k(t) + b(t)u_k'(t), \quad f_k(t) = m_k \int_0^1 f(x, t) \cos \lambda_k x dx ,$$

$$\varphi_k = m_k \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \psi_k = m_k \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, \dots) .$$

Решая задачу (12), (13) находим:

$$u_0(t) = \varphi_0 + t\psi_0 + \int_0^t (t - \tau)F_0(\tau; u, a, b)d\tau , \quad (14)$$

$$\begin{aligned} u_k(t) = \varphi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t + \\ + \frac{1}{\beta_k(1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau \quad (k=1, 2, \dots) , \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\beta_k^2 = \frac{\lambda_k^2 + \lambda_k^4}{1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Теперь, из (14) и (15) соответственно, имеем:

$$u'_0(t) = \psi_0 + \int_0^t F_0(\tau; u, a, b) d\tau, \quad (16)$$

$$u'_k(t) = -\beta_k \varphi_k \sin \beta_k t + \psi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \cos \beta_k(t - \tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

После подстановки выражения  $u_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) в (11), для определения компоненты  $u(x, t)$  решения задачи (1)- (3), (6) получаем:

$$u(x, t) = \varphi_0 + t\psi_0 + \int_0^t (t - \tau) F_0(\tau; u, a, b) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k (1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau \right\} \cos \lambda_k x. \quad (18)$$

Теперь, из (6), с учетом (11), имеем:

$$a(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ (h_1''(t)) - f(x_1, t) h_2'(t) - (h_2''(t)) - f(x_2, t) h_1'(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 + \lambda_k^4) (u_{1k}''(t) + u_{1k}(t)) (h_2'(t) \cos \lambda_k x_1 - h_1'(t) \cos \lambda_k x_2) \right\}, \quad (19)$$

$$b(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ (h_2''(t)) - f(x_2, t) h_1(t) - (h_1''(t)) - f(x_1, t) h_2(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 + \lambda_k^4) (u_{1k}''(t) + u_{1k}(t)) (h_1(t) \cos \lambda_k x_2 - h_2(t) \cos \lambda_k x_1) \right\}. \quad (20)$$

Из (12), с учетом (15), получаем:

$$\begin{aligned} (\lambda_k^2 + \lambda_k^4) (u_k''(t) + u_k(t)) &= -u_k''(t) + F_k(t; u, a, b) = \\ &= \frac{\lambda_k^2 + \lambda_k^4}{1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4} u_k(t) + \left( 1 - \frac{1}{1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4} \right) F_k(t; u, a, b) = \\ &= \frac{\lambda_k^2 + \lambda_k^4}{1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4} u_k(t) + \frac{\lambda_k^2 + \lambda_k^4}{1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4} F_k(t; u, a, b) = \beta_k^2 u_k(t) + \beta_k^2 F_k(t; u, a, b) = \\ &= \beta_k^2 u_k(t) + \beta_k^2 F_k(t; u, a, b) = \beta_k^2 \left[ \varphi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\beta_k (1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau \right] + \beta_k^2 F_k(t; u, a, b), \end{aligned}$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Далее из (19) и (20), с учетом последнего соотношения, находим:

$$a(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ (h_1''(t)) - f(x_1, t) h_2'(t) - (h_2''(t)) - f(x_2, t) h_1'(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (h_2'(t) \cos \lambda_k x_1 - h_1'(t) \cos \lambda_k x_2) \beta_k^2 \left[ \varphi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t + \right. \right.$$



$$+ \frac{1}{\beta_k(1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau + F_k(t; u, a, b) \Big] , \quad (21)$$

$$b(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ (h_2''(t)) - f(x_2, t)h_1(t) - (h_1''(t)) - f(x_1, t)h_2(t) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (h_1(t) \cos \lambda_k x_2 - h_2(t) \cos \lambda_k x_1) \beta_k^2 \left[ \varphi_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_k \sin \beta_k t + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\beta_k(1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau + F_k(t; u, a, b) \right] \right\}. \quad (22)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (6) свелось к решению системы (18), (21), (22) относительно неизвестных функций  $u(x, t)$ ,  $a(t)$  и  $b(t)$ .

**Лемма 1.** Если  $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$  – любое решение задачи (1)-(3), (6), то функции

$$u_k(t) = m_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, \dots)$$

удовлетворяют системе, состоящей из уравнений (14), (15).

**Доказательство.** Пусть  $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$  – любое решение задачи (1)-(3), (6). Тогда умножив обе части уравнения (1) на функцию  $m_k \cos \lambda_k x$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), интегрируя полученное равенство по  $x$  от 0 до 1 и пользуясь соотношениями

$$m_k \int_0^1 u_{tt}(x, t) \cos \lambda_k x dx = \frac{d^2}{dx^2} \left( m_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = u_k''(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$m_k \int_0^1 u_{xt}(x, t) \cos \lambda_k x dx = -\lambda_k^2 \left( m_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = -\lambda_k^2 u_k(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$m_k \int_0^1 u_{xxx}(x, t) \cos \lambda_k x dx = -\lambda_k^2 \left( m_k \int_0^1 u_{tt}(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = -\lambda_k^2 u_k''(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$m_k \int_0^1 u_{xxx}(x, t) \cos \lambda_k x dx = \lambda_k^4 \left( m_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = \lambda_k^4 u_k(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$m_k \int_0^1 u_{xxxx}(x, t) \cos \lambda_k x dx = \lambda_k^4 \left( m_k \int_0^1 u_{tt}(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = \lambda_k^4 u_k''(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

получаем, что удовлетворяется уравнение (12).

Аналогично, из (2) получаем, что выполняется условие (13).

Таким образом,  $u_k(t)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) является решением задачи (12), (13). А отсюда, непосредственно следует, что функции  $u_k(t)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) удовлетворяют на  $[0, T]$  системе (14), (15). Лемма доказана.

Очевидно, что если  $u_k(t) = m_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) является решением системы (14), (15), то тройка  $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$  функций  $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x$ ,  $a(t)$  и  $b(t)$  является решением системы (18), (21), (22).

Из леммы 1 следует, что имеет место следующее

**Следствие.** Пусть система (18), (21), (22) имеет единственное решение. Тогда задача (1)-(3), (6) не может иметь более одного решения, т.е. если задача (1)-(3), (6) имеет решение, то оно единственно.

С целью исследования задачи (1)-(3), (6) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через  $B_{2,T}^{5,4}$  [13] совокупность всех функций вида

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi),$$

рассматриваемых в  $D_T$ , где каждая из функций  $u_k(t)$  ( $k=0,1,\dots$ ) непрерывна дифференцируема на  $[0,T]$  и

$$J(u) = \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \\ + \|u'_0(t)\|_{C[0,T]} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^4 \|\dot{u}'_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{5,4}} = J_T(u).$$

Через  $E_T^{5,4}$  обозначим пространство  $B_{2,T}^{5,4} \times C[0,T] \times C[0,T]$  вектор-функций  $z(x,t) = \{u(x,t), a(t), b(t)\}$  с нормой

$$\|z(x,t)\|_{E_T^{5,4}} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{5,4}} + \|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что  $B_{2,T}^{5,4}$  и  $E_T^{5,4}$  являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве  $E_T^{5,4}$  оператор

$$\Phi(u, a, b) = \{\Phi_1(u, a, b), \Phi_2(u, a, b), \Phi_3(u, a, b)\},$$

где

$$\Phi_1(u, a, b) = \tilde{u}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \cos \lambda_k x, \quad \Phi_2(u, a, b) = \tilde{a}(t), \quad \Phi_3(u, a, b) = \tilde{b}(t),$$

а  $\tilde{u}_0(t)$ ,  $\tilde{u}_k(t)$ ,  $\tilde{a}(t)$  и  $\tilde{b}(t)$  равны соответственно правым частям (14), (15), (21) и (22).

Очевидно, что

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \beta_k < \sqrt{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{\beta_k} < \sqrt{3}.$$

Тогда, имеем:

$$\|\tilde{u}_0(t)\|_{C[0,T]} \leq |\varphi_0| + T|\psi_0| + T\sqrt{T} \left( \int_0^T |f_0(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + T^2 \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + T^2 \|b(t)\|_{C[0,T]} \|u'_0(t)\|_{C[0,T]}, \quad (23) \\ \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{5} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{15} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + \sqrt{15T} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{15} T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sqrt{15T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}'_0(t)\|_{C[0,T]} \leq |\psi_0| + \sqrt{T} \left( \int_0^T |f_0(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + T \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + T \|b(t)\|_{C[0,T]} \|u'_0(t)\|_{C[0,T]}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 \|\tilde{u}'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{10} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{5} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \sqrt{5T} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{5T} \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \sqrt{5T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq & \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \left\| (h_1''(t)) - f(x_1, t) h_2'(t) - (h_2''(t)) - f(x_2, t) h_1'(t) \right\|_{C[0,T]} + \right. \\ & + 2 \left\| h_2'(t) \right\| + \left\| h_1'(t) \right\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. \left. + \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\psi_k|)^2 \right) + \sqrt{T} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} + \\ & + T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + T \|b(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|f_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & \left. \left. + T \|b(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \leq & \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \left\| h_2''(t) - f(x_2, t) h_1(t) - (h_1''(t)) - f(x_1, t) h_2(t) \right\|_{C[0,T]} + \right. \\ & + 2 \left\| h_2(t) \right\| + \left\| h_1(t) \right\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. \left. + \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\psi_k|)^2 \right) + \sqrt{T} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} + \\ & + T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + T \|b(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|f_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & \left. \left. + T \|b(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

Предположим, что данные задачи (1)- (3), (6) удовлетворяют сле-

ДУЮЩИМ УСЛОВИЯМ:

1.  $\varphi(x) \in C^4[0,1]$ ,  $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0,1)$ ,  $\varphi'(0) = \varphi'(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$ .
2.  $\psi(x) \in C^4[0,1]$ ,  $\psi^{(5)}(x) \in L_2(0,1)$ ,  $\psi'(0) = \psi'(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$ .
3.  $f(x,t), f_x(x,t), f_{xx}(x,t), f_{xxx}(x,t) \in C(D_T)$ ,  $f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T)$ ,  
 $f_x(0,t) = f_x(1,t) = f_{xxx}(0,t) = f_{xxx}(1,t) = 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ).
4.  $h_i(t) \in C^2[0,T]$  ( $i=1,2$ ),  $h(t) \equiv h_1(t)h_2'(t) - h_2(t)h_1'(t) \neq 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ).

Тогда из (23)-(28) имеем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,4}} \leq A_1(T) + B_1(T) \left( \|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]} \right) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,4}}, \quad (29)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_2(T) + B_2(T) \left( \|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]} \right) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,4}}, \quad (30)$$

$$\|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_3(T) + B_3(T) \left( \|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]} \right) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,4}}, \quad (31)$$

где

$$A_1(T) = \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + (1+T)\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{T}(1+T)\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \\ + \sqrt{5}(1+\sqrt{2})\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{5}(1+\sqrt{3})\|\psi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ + \sqrt{5T}(1+\sqrt{3})\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \quad B_1(T) = (T+2\sqrt{5})T,$$

$$A_2(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|(h_1''(t) - f(x_1,t))h_2'(t) - (h_2''(t) - f(x_2,t))h_1'(t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ \left. + 2\|h_2'(t) + |h_1'(t)|\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \right. \\ \left. + \sqrt{3}\|\psi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{3T}\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \|[f_x(x,t)]_{C[0,T]}\|_{L_2(0,1)} \right\},$$

$$B_2(T) = 2\|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \|h_2'(t) + |h_1'(t)|\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} (T+1)$$

$$A_3(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|(h_2''(t) - f(x_2,t))h_1(t) - (h_1''(t) - f(x_1,t))h_2(t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ \left. + 2\|h_2(t) + |h_1(t)|\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \right. \\ \left. + \|\psi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{T}\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \|[f_x(x,t)]_{C[0,T]}\|_{L_2(0,1)} \right\},$$

$$B_3(T) = 2\|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \|h_2(t) + |h_1(t)|\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} (T+1).$$

Из неравенств (29)- (31) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,4}} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} + \|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \leq \\ \leq A(T) + B(T) \left( \|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]} \right) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,4}}, \quad (32)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T) + A_3(T), \quad B(T) = B_1(T) + B_2(T) + B_3(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия 1-4 и

$$(A(T) + 2)^2 B(T) < 1. \quad (33)$$

Тогда задача (1) - (3), (6) имеет в шаре  $K = K_R (\|z\|_{E_T^{5,4}} \leq R = A(T) + 2)$  пространства  $E_T^{5,4}$  единственное решение.

**Доказательство.** В пространстве  $E_T^{5,4}$  рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (34)$$

где  $z = \{u, a, b\}$ , компоненты  $\Phi_i(u, a, b)$  ( $i=1,2,3$ ), оператора  $\Phi(u, a, b)$  определены правыми частями уравнений (18), (21) и (22).

Рассмотрим оператор  $\Phi(u, a, b)$  в шаре  $K = K_R$  из  $E_T^{5,4}$ . Аналогично (32) получаем, что для любых  $z, z_1, z_2 \in K_R$  справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^{5,4}} \leq A(T) + B(T) \left( \|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]} \right) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{5,4}}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^{5,4}} \leq \\ & \leq B(T)R \left( \|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|b_1(t) - b_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^{5,4}} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Тогда, из оценок (35), (36), с учетом (33), следует, что оператор  $\Phi$  действует в шаре  $K = K_R$  и является сжимающим. Поэтому в шаре  $K = K_R$  оператор  $\Phi$  имеет единственную неподвижную точку  $\{u, a, b\}$ , которая является в шаре  $K = K_R$  единственным решением уравнения (34), т.е.  $\{u, a, b\}$  является в шаре  $K = K_R$  единственным решением системы (18), (21) и (22).

Функция  $u(x,t)$ , как элемент пространства  $B_{2,T}^{5,4}$ , имеет непрерывные производные  $u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t), u_t(x,t), u_{tx}(x,t), u_{txx}(x,t), u_{txxx}(x,t)$  в  $D_T$ .

Из (12) нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{L}_k^5 \|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{L}_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \sqrt{2} \left\| f_x(x,t) + a(t)u_x(x,t) + b(t)u_{tx}(x,t) \right\|_{C[0,T]} \Big|_{L_2(0,1)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $u_{tt}(x,t), u_{ttx}(x,t), u_{ttxx}(x,t), u_{ttxxx}(x,t), u_{ttxxxx}(x,t)$  непрерывны в  $D_T$ .

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3) и (6) удовлетворяются в обычном смысле.

Следовательно,  $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$  является решением задачи (1)- (3), (6), причем, в силу следствия леммы 1, оно единственное в шаре  $K = K_R$ . Теорема доказана.

С помощью теоремы 1 доказывается следующая

**Теорема 3.** Пусть выполняются все условия теоремы 2 и

$$\varphi(x_i) = h_i(0), \quad \psi(x_i) = h_i'(0) \quad (i=1,2).$$

Тогда задача (1)-(4) имеет в шаре  $K = K_R(\|z\|_{E_T^{5,4}} \leq R = A(T) + 2)$  из  $E_T^{5,4}$  единственное классическое решение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Schneider G., Eugene C.W. Kawahara dynamics in dispersive media, Physica. D. 152–153 (2001) 384–394.
2. Polat N. Existence and blow up of solutions of the Cauchy problem of the generalized damped multidimensional improved modified Boussinesq equation, Z. Naturforsch. 63a (2008) 543–552.
3. Xu R., Liu Y., Liu B. The Cauchy problem for a class of the multidimensional Boussinesq-type equation, Nonlinear Anal. 74 (2011) 2425–2437.
4. Polat N., Ertay A. Existence and blow up of solution of Cauchy problem for the generalized damped multidimensional Boussinesq equation, J. Math. Anal. Appl. 349 (2009) 10–20.
5. Lin Q., Wu Y.H., Loxton R. On the Cauchy problem for a generalized Boussinesq equation, J. Math. Anal. Appl. 353 (2009) 186–195.
6. Polat N., Kaya D. Blow up of solutions for the generalized Boussinesq equation with damping term, Z. Naturforsch. 61a (2006) 235–238.
7. Wang Y., Mu C. Blow-up and scattering of solution for a generalized Boussinesq equation, Appl. Math. Comput. 188 (2007) 1131–1141.
8. Tikhonov A.I. On stability of inverse problems, Dokl. AN SSSR, 39 (1943), no. 5, 195–198. (in Russian)
9. Lavrent'ev M.M. On an inverse problem for a wave equation, Dokl. AN SSSR, 157 (1964), no. 3, 520–521. (in Russian)
10. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatsky S.T. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis, M. Nauka, 1980. (in Russian)
11. Denisov A.M. Introduction to Theory of Inverse Problems, M: MSU, 1994, (in Russian).
12. Ivanchoy M.I. Inverse Problems for Equation of Parabolic Type, Ukraine, 2003.
13. Mehraliyev Ya. On an inverse boundary value problem for a second order elliptic equation with integral condition. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 145–156.

#### ALTI TƏRTİB İKİLİ DİSPERSİYALI BUSSİNESK TƏNLİYİ ÜÇÜN TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

A.S.FƏRƏCOV

#### XÜLASƏ

İkili dispersiyalı Bussinesk tənliyi üçün Neyman tipli sərhəd şərtli bir tərs sərhəd məsələsi araşdırılmışdır. Məsələ əvvəl ekvivalent məsələyə gətirilmiş və onun üçün həllin varlığı və yeganəliyi isbat olunmuşdur. Sonra bu teoremlərdən istifadə edərək qoyulmuş məsələnin klassik həllinin varlığı və yeganəliyi göstərilmişdir.

**Açar sözlər:** tərs məsələ, Bussinesk tənliyi, varlıq, yeganəlik, klassik həll.

# INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SIXTH-ORDER BOUSSINESQ EQUATION WITH DOUBLE VARIANCE

A.S.FARAJOV

## SUMMARY

An inverse boundary value problem for the sixth-order double dispersion Boussinesq equation with Neumann-type boundary conditions is investigated. Firstly, the original problem is reduced to an equivalent problem for which a theorem on the existence and uniqueness of a solution is proved. Furthermore, using these facts, the existence and uniqueness of the classical solution of the original problem is proved.

**Keywords:** inverse problem, Boussinesq equations, existence, uniqueness, classical solution.

УДК 517.9

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА СОДЕРЖАЩАЯ ВТОРЫЕ  
ПРОИЗВОДНЫЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ, II

М.А.САДЫГОВ, А.М.САДЫГОВ

*Бакинский Государственный Университет*  
*misreddin08@rambler.ru*

*В работе получены необходимые и достаточные условия экстремума для вариационной задачи, содержащей вторые производные неизвестных функций. С помощью введенного автором субдифференциала рассмотрена невыпуклая обобщенная вариационная задача, содержащая вторые производные неизвестных функций, и получено необходимое условие экстремума.*

**Ключевые слова:** необходимое условие, липшицева функция, субдифференциал.

**Введение**

Используя субдифференциала интегрального и терминального функционала в пространстве типа абсолютно непрерывных функций (см.[1]) и теорию двойственности в задачах выпуклой оптимизации, в работе исследуется обобщенная выпуклая вариационная задача, которая содержит вторую производную неизвестной функции. Хотя выпуклые вариационные задачи изучены разными авторами, но такие задачи не применимы к выпуклым экстремальным задачам для включений.

Результаты работы развивают некоторые результаты в [2] при  $m = 2$ , где получены необходимые и достаточные условия минимума для вариационной задачи, содержащей  $m$ -производные неизвестные функции. В данной работе получено необходимое и достаточное условие экстремума для обобщенной вариационной задачи, содержащей вторые производные неизвестных функций. Используя субдифференциал, введенный автором (см.[3], [4]), для невыпуклой вариационной задачи, содержащей вторые производные неизвестных функций получено необходимое условие экстремума.

**1. Об обобщенной задаче Больца**

Пусть  $f : [t_0, T] \times R^{3n} \rightarrow R_\infty$  нормальный интегрант,  $\varphi : R^{4n} \rightarrow R_\infty$  функция, где  $R_\infty = R \cup \{+\infty\}$ .

Рассматривается задача минимизации функционала

$$\Phi_0(x) = \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt \quad (1.1)$$



при  $x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ .

Будем говорить, что функция  $\bar{x}(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ , является решением обобщенной задачи (1.1), если  $|\Phi_0(\bar{x})| < +\infty$  и справедливо неравенство  $\Phi_0(x) \geq \Phi_0(\bar{x})$  при любой функции  $x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ .

Пусть  $J: W_{p,2}^n[t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ . Субградиентами  $J(x)$  в точке  $\bar{x} \in W_{p,2}^n[t_0, T]$  являются по определению элементы  $x^* \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$  для которых  $J(x) - J(\bar{x}) \geq x^*(x - \bar{x})$  при всех  $x \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ . Множество всех субградиентов обозначается через  $\partial J(\bar{x})$  и называется субдифференциалом функционала  $J(x)$  в точке  $\bar{x}$ .

Рассмотрим функционал

$$\Phi(x, y) = \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t) + y(t)) dt,$$

где  $y(\cdot) \in L_p^n[t_0, T]$ .

Положим  $h(y) = \inf_{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \Phi(x, y)$ . Если  $f: [t_0, T] \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  нормальный выпуклый интегрант,  $\varphi: \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  выпуклая функция, то из предложения 2.5 [5, с.28] вытекает, что  $h$  выпуклая функция.

**Лемма 1.1.** Пусть  $f: [t_0, T] \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  нормальный выпуклый интегрант,  $\varphi: \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  выпуклая функция,  $\inf_{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \Phi_0(x)$  конечен и существует такая точка  $x_0(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ , что функция  $f(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t) + \dot{x}, \ddot{x}_0(t))$  суммируема в  $[t_0, T]$  для некоторого  $r > 0$  и  $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $|(x, z)| \leq r$ , а функция  $\varphi(x_0(t_0), \dot{x}_0(t_0), \cdot)$  непрерывна в точке  $(x_0(T), \dot{x}_0(T))$ . Тогда функция  $h$  субдифференцируема в нуле, т.е. задача (1.1) стабильна (см. [6, с.60]).

**Доказательство.** Из леммы 1.1[1] следует, что функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^T f(t, x_0(t) + x(t), \dot{x}_0(t) + \dot{x}(t), \ddot{x}_0(t)) dt$$

непрерывен в точке нуль в пространстве  $W_{p,2}^n[t_0, T]$ . Тогда существуют  $\alpha_1 > 0$  и  $L_1$  такие, что  $J(x) \leq L_1$  при  $x \in \{z(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T] : |z(t_0)| + |\dot{z}(t_0)| + (\int_{t_0}^T |\ddot{z}(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha_1\}$ .

Так как функция  $\varphi(x_0(t_0), \dot{x}_0(t_0), \cdot)$  непрерывна в точке  $(x_0(T), \dot{x}_0(T))$ , то существуют  $\alpha_2 > 0$  и  $L_2$ , что  $\varphi(x_0(t_0), \dot{x}_0(t_0), b) \leq L_2$  при  $|b - (x_0(T), \dot{x}_0(T))| < \alpha_2$ ,  $b \in \mathbb{R}^{2n}$ .

Отметим, что существует число  $c > 0$  такое, что

$$\left| \int_{t_0}^T \int_{t_0}^s y(v) dv ds, \int_{t_0}^T y(v) dv \right| = \left| \int_{t_0}^T (T-v)y(v) dv \right| + \left| \int_{t_0}^T y(v) dv \right| \leq c \left( \int_{t_0}^T \left( \sum_{i=1}^n (y_i(v))^2 \right) dv \right)^{\frac{1}{p}} = c \|y(\cdot)\|_p.$$

Обозначив  $\alpha = \min\{\alpha_1, \frac{1}{c}\alpha_2\}$ ,  $x_y(t) = x_0(t) - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s y(v) dv ds$  получим

$$h(y) = \inf_{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \Phi(x, y) \leq \Phi(x_y, y) \leq L_1 + L_2$$

при  $y(\cdot) \in L_p^n[t_0, T]$ ,  $\|y\|_p \leq \alpha$ . Тогда из леммы 1.2.1 [6, с.21] и предложения 1.5.2 [6, с.31] следует, что  $h$  субдифференцируема в точке нуль. Лемма доказана.

Пусть  $v, w \in \mathbb{R}^n$ . Положим  $f^0(t, z, v) = \inf_{w \in \mathbb{R}^n} \{(w|v) + f(t, z, w)\}$ , где  $z \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\partial f^0(t, x, y, \bar{z}(t)) = \partial_{(x,y)} f^0(t, x, y, \bar{z}(t))$ , где  $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$  и  $\partial f(t, x, y, v) = \partial f_t(x, y, v)$ , где  $(x, y, v) \in \mathbb{R}^{3n}$ .

**Теорема 1.1.** Пусть  $f: [t_0, T] \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  нормальный интегрант,  $\varphi: \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  функция. Для того, чтобы функция  $\bar{x}(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$  среди всех функций  $x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$  минимизировала функционал (1.1) достаточно, чтобы нашлись функции  $\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$ ,  $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$  и числа  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$  такие, что

- 1)  $(\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t)) \in \partial f^0(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \bar{z}(t))$ ,
- 2)  $f^0(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \bar{z}(t)) = (\bar{z}(t)|\ddot{\bar{x}}(t)) + f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$
- 3)  $(\dot{\psi}_0(t_0) + c_1, -\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$ ,
- 4)  $\bar{z}(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t) + c_2 + c_1 t$ ,
- 5)  $\dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0, \psi_1(T) = 0$ ,

а если выполнено условие леммы 1.1 при  $x_0(t) = \bar{x}(t)$ , то условия 1)-5) и являются необходимыми.

**Доказательство. Достаточность.** Из соотношения 1) теоремы 1.1 следует, что

$$f^0(t, x, y, \bar{z}(t)) - f^0(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \bar{z}(t)) \geq (\ddot{\psi}_0(t)|x - \bar{x}(t)) - (\dot{\psi}_1(t)|y - \dot{\bar{x}}(t))$$

при  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Отсюда, используя из соотношения 2) теоремы 1.1 имеем, что

$$\int_{t_0}^T (\bar{z}(t)|\ddot{x}(t)) dt + \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt - \int_{t_0}^T (\bar{z}(t)|\ddot{\bar{x}}(t)) dt - \int_{t_0}^T f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) dt \geq \int_{t_0}^T [(\ddot{\psi}_0(t)|x(t) - \bar{x}(t)) - (\dot{\psi}_1(t)|\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t))] dt$$

при  $x(\cdot) \in W_{p,2}^n([t_0, T])$ . Поэтому

$$\int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt - \int_{t_0}^T f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) dt \geq \int_{t_0}^T [(\ddot{\psi}_0(t)|x(t) - \bar{x}(t)) - (\dot{\psi}_1(t)|\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t))] dt + \int_{t_0}^T (\bar{z}(t)|\ddot{x}(t) - \ddot{\bar{x}}(t)) dt$$

при  $x(\cdot) \in W_{p,2}^n([t_0, T])$ . Из соотношения 3) теоремы 1.1 следует, что

$$\varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) - \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)) \geq (x(t_0) - \bar{x}(t_0)|\dot{\psi}_0(t_0) + c_1) + (x(T) - \bar{x}(T)|-c_1) + (\dot{x}(T) - \dot{\bar{x}}(T)|c_1 T + c_2) + (\dot{\bar{x}}(t_0) - \dot{x}(t_0)|-\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2) + (\dot{\bar{x}}(T) - \dot{x}(T)|-\psi_0(T) - \psi_1(T) - c_1 T - c_2)$$

при  $x(\cdot) \in W_{p,2}^n([t_0, T])$ .

Интегрируя по частям и применяя формулы Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_{t_0}^T [(\ddot{\psi}_0(t)|x(t) - \bar{x}(t)) - (\dot{\psi}_1(t)|\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t))] dt + \int_{t_0}^T (\bar{z}(t)|\ddot{x}(t) - \ddot{\bar{x}}(t)) dt = -[(x(t_0) - \bar{x}(t_0)|\dot{\psi}_0(t_0) + c_1) + (\dot{x}(t_0) - \dot{\bar{x}}(t_0)|-\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2) + (x(T) - \bar{x}(T)|-c_1) + (\dot{x}(T) - \dot{\bar{x}}(T)|c_1 T + c_2)].$$

Поэтому получим, что

$$\int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt - \int_{t_0}^T f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) dt + \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) - \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)) \geq 0$$

при  $x(\cdot) \in W_{p,2}^n([t_0, T])$ . Достаточность теоремы 1.1 доказана.

**Необходимость.** Из леммы 1.1 вытекает, что  $h$  субдифференцируема в точке нуль. Поэтому из замечания 3.2.3 и из предложения 3.2.4 [6] следует, что решения  $\bar{x}(\cdot)$  задачи  $\inf\{\Phi_0(x) : x \in W_{p,2}^n[t_0, T]\}$  и решения  $-\bar{z}(\cdot)$  задачи  $\sup_{z \in L_p^n[t_0, T]} \{-\Phi^*(0, z)\}$  связаны экстремальным соотношением

$$\Phi(\bar{x}, 0) + \Phi^*(0, -\bar{z}) = 0, \quad (1.2)$$

где  $pp' = p + p'$ . По определению

$$\begin{aligned} \Phi^*(0, -\bar{z}) &= \sup_{\substack{x \in W_{p,2}^n[t_0, T] \\ y \in L_p^n[t_0, T]}} \left\{ -\int_{t_0}^T (y(t)|\bar{z}(t))dt - \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t) + y(t))dt - \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \right\} = \\ &= \sup_{\substack{x \in W_{p,1}^n[t_0, T] \\ y \in L_p^n[t_0, T]}} \left\{ -\int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) + y(t)|\bar{z}(t))dt + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t)|\bar{z}(t))dt - \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t) + y(t))dt - \right. \\ &\left. - \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \right\} = \sup_{x \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \left\{ \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t)|\bar{z}(t))dt - \int_{t_0}^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t), \bar{z}(t))dt - \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \right\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Обозначим  $J_1(x) = \int_{t_0}^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t), \bar{z}(t))dt$ ,  $J_2(x) = \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T))$ . Из (1.2), (1.3) вытекает, что  $J_1$  и  $J_2$  собственные функционалы. Из предложения 2.5 [5, с.28] следует, что  $(x, y) \rightarrow f^0(t, x, y, \bar{z}(t))$  выпуклая функция и аналогично теореме 8.1.4 или предложению 8.1.10 [7, с.345, 348] проверяется, что  $f^0(t, x, y, \bar{z}(t))$   $L \times V$ -измерима. Так как

$$f^0(t, \bar{x}(t) + x, \dot{\bar{x}}(t) + y, \bar{z}(t)) \leq \langle \bar{z}(t), \ddot{\bar{x}}(t) \rangle + f(t, \bar{x}(t) + x, \dot{\bar{x}}(t) + y, \ddot{\bar{x}}(t))$$

при  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $\|(x, y)\| \leq r$  в  $[t_0, T]$ , то при условии теоремы 1.1 имеем, что функционал  $J_1(x)$  непрерывен в точке  $\bar{x}(\cdot)$ . По условию  $J_2(\bar{x}(\cdot))$  конечен.

Положив  $S(x(\cdot)) = \int_{t_0}^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t), \bar{z}(t))dt + \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T))$  и  $\bar{z}^* = (0, 0, \bar{z}(\cdot)) \in W_{p,2}^n([t_0, T])^*$  имеем, что  $\Phi^*(0, -\bar{z}) = S^*(\bar{z}^*)$ . Используя неравенство Юнга-Фенхеля получим

$$S^*(\bar{z}^*) \geq \int_{t_0}^T \langle \bar{z}(t), \ddot{\bar{x}}(t) \rangle dt - S(\bar{x}), \quad S(\bar{x}) \leq \int_{t_0}^T \langle \bar{z}(t), \ddot{\bar{x}}(t) \rangle dt + \Phi_0(\bar{x}),$$

то отсюда получим, что  $S^*(\bar{z}^*) \geq \int_{t_0}^T \langle \bar{z}(t), \ddot{\bar{x}}(t) \rangle dt - S(\bar{x}) \geq -\Phi_0(\bar{x})$ . Поэтому из соотношения (1.2) вытекает, что  $S^*(\bar{z}^*) = \int_{t_0}^T \langle \bar{z}(t), \ddot{\bar{x}}(t) \rangle dt - S(\bar{x})$ ,  $S(\bar{x}) = \int_{t_0}^T \langle \bar{z}(t), \ddot{\bar{x}}(t) \rangle dt + \Phi_0(\bar{x})$ . Из второго соотношения имеем, что

$\int_{t_0}^T f^0(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \bar{z}(t))dt - \int_{t_0}^T f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))dt = \int_{t_0}^T \langle \bar{z}(t), \ddot{\bar{x}}(t) \rangle dt$ . Отсюда получим, что  $f^0(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \bar{z}(t)) = \langle \bar{z}(t), \ddot{\bar{x}}(t) \rangle + f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$  при  $t \in [t_0, T]$ . Из равенства  $S^*(\bar{z}^*) = \int_{t_0}^T \langle \bar{z}(t), \ddot{\bar{x}}(t) \rangle dt - S(\bar{x})$  вытекает, что  $\bar{z}^* \in \partial_{W_{p,2}^n} S(\bar{x})$ . Из теоремы 0.3.3 [7,

с.59] (теорема Морю-Рокафеллара) имеем, что  $\partial_{W_{p,2}^n} S(\bar{x}) = \partial_{W_{p,2}^n} J_1(\bar{x}) + \partial_{W_{p,2}^n} J_2(\bar{x})$ . Тогда найдутся точки  $z_i^* \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$ , где  $i=1,2$ , такие, что  $\bar{z}^* = z_1^* + z_2^*$ ,  $z_1^* = (a_0, a_1, v_1(\cdot))$ ,  $z_2^* = (d, b, v_2(\cdot))$  и  $z_1^* \in \partial_{W_{p,2}^n} J_1(\bar{x})$ ,  $z_2^* \in \partial_{W_{p,2}^n} J_2(\bar{x})$ . По теореме 1.1[1]  $z_1^* = (a_0, a_1, v_1(\cdot)) \in \partial_{W_{p,2}^n} J_1(\bar{x})$  в том и только в том случае, когда существуют функции  $\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$  и  $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$  такие, что  $a_0 = -\dot{\psi}_0(t_0)$ ,  $a_1 = \psi_0(t_0) + \psi_1(t_0)$ ,  $v_1(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t)$ ,  $\psi_1(T) = 0$ ,  $\dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0$  и  $(\dot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t)) \in \partial f^0(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$ .

По теореме 2.1[1]  $z_2^* \in \partial_{W_{p,2}^n} J_2(\bar{x})$ , где  $z_2^* \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$ ,  $z_2^* = (d, b, v_2(\cdot))$ , то  $v_2(t) = c_1 t + c_2$ , где  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$  и  $(d + c_1, b - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$ . Поэтому  $\bar{z}(t) = v_1(t) + c_1 t + c_2$ ,  $a_0 + d = 0$ ,  $a_1 + b = 0$ , т.е.  $\bar{z}(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t) + c_1 t + c_2$ ,  $-\dot{\psi}_0(t_0) + d = 0$ ,  $\psi_0(t_0) + \psi_1(t_0) + b = 0$ . Отсюда следует, что  $(\dot{\psi}_0(t_0) + c_1, -\dot{\psi}_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.1.** Пусть  $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  нормальный интегрант,  $\varphi : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  функция. Для того, чтобы функция  $\bar{x}(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$  среди всех функций  $x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$  минимизировала функционал (1.1) достаточно, чтобы нашлись функции  $\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$ ,  $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$  и числа  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$  такие, что

- 1)  $(\dot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t), -\psi_0(t) - \psi_1(t) - c_2 - c_1 t) \in \partial f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$ ,
- 2)  $(\dot{\psi}_0(t_0) + c_1, -\dot{\psi}_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$ ,
- 3)  $\dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0, \psi_1(T) = 0$ ,

а если выполнено условие леммы 1.1 при  $x_0(t) = \bar{x}(t)$ , то условия 1)-3) и являются необходимыми.

**Замечание 1.1.** Пусть  $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  нормальный интегрант,  $\varphi : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$  функция,  $a : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp } \mathbb{R}^n \cup \{\emptyset\}$ ,  $M$  непустое множество в  $\mathbb{R}^{4n}$ .

Рассмотрим минимизацию функционала

$$\Phi_0(x) = \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt, \quad (1.4)$$

среди всех решений задачи

$$\ddot{x}(t) \in a(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad (1.5)$$

$$(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \in M, \quad x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]. \quad (1.6)$$

Пусть  $a : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp } \mathbb{R}^n \cup \{\emptyset\}$  отображение такое, что  $t \rightarrow \text{gra}_t$  измеримо на  $[t_0, T]$ , множество  $\text{gra}_t$  замкнуто почти для всех  $t \in [t_0, T]$ , причем  $a(t, z)$  компактны при всех  $t, z$ . Отсюда следует, что  $\omega(t, z, v)$

нормальный интегрант на  $[t_0, T] \times \mathbb{R}^{3n}$ , где  $\omega(t, z, v) = \begin{cases} 0, & \text{если } v \in a(t, z) \\ +\infty, & \text{если } v \notin a(t, z). \end{cases}$

Решение задачи (1.5), (1.6), минимизирующее функционал (1.4) среди всех решений задачи (1.5), (1.6) назовем оптимальным. Требуется найти достаточные условия оптимальности решения задачи (1.4)–(1.6). Поставленная задача эквивалентна следующей

$$\Phi(x) = \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt + \int_{t_0}^T \omega(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt + \delta_M(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \rightarrow \min, \quad (1.7)$$

где  $\delta_M(w) = \begin{cases} 0: & \text{если } w \in M, \\ +\infty: & \text{если } w \notin M. \end{cases}$

**Следствие 1.2.** Пусть  $f: [t_0, T] \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  нормальный интегрант,  $\omega: [t_0, T] \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  нормальный интегрант,  $\varphi: \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  функция. Для того, чтобы функция  $\bar{x}(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$  среди всех функций  $x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$  минимизировала функционал (1.7) достаточно, чтобы нашлись функции  $\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$ ,  $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$  и числа  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$  такие, что

- 1)  $(\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t), -\psi_0(t) - \psi_1(t) - c_2 - c_1 t) \in \partial(f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) + \omega(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))),$
- 2)  $(\dot{\psi}_0(t_0) + c_1, -\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial(\varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)) + \delta_M(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))),$
- 3)  $\dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0, \psi_1(T) = 0.$

## 2. Невыпуклый случай

Пусть  $X$  банахово пространство,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ ,  $\text{dom} f = \{x \in X: f(x) < +\infty\}$ ,  $x_0 \in \text{dom} f$ . Положим

$$f^+(x_0; x) = \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}, \quad f^-(x_0; x) = \underline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t},$$

$$f^I(x_0; x) = \max\{f^+(x_0; x), -f^-(x_0; -x)\}.$$

Множество  $\partial^I f(x_0) = \{x^* \in X^*: \langle x^*, x \rangle \leq f^I(x_0; x), x \in X\}$  назовем субдифференциалом функции  $f$  в точке  $x_0$ .

Функция  $p$ , определенная на пространстве  $X$ , называется положительно однородной, если  $p(0) = 0$  и  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$  для всех  $x \in X$  и  $\lambda > 0$ . Положительно однородная выпуклая (вогнутая) функция называется сублинейной (суперлинейной). Если  $p$  сублинейная функция, то положим  $\partial p(0) = \{x^* \in X^*: p(x) \geq \langle x^*, x \rangle \text{ при } x \in X\}$ .

Отметим, что в общем случае функция  $x \rightarrow f^I(x_0; x)$  не является сублинейной. Поэтому рассмотрим другое определение субдифференциала.

Положим  $cl f^I(x_0; x) = \underline{\lim}_{z \rightarrow x} f^I(x_0; z)$ . Будем говорить, что функция  $f$  в точке  $x_0 \in \text{dom} f$  допускает сублинейную аппроксимацию  $h(x)$ , если

$h(x)$  сублинейная полунепрерывная снизу функция и  $h(x) \geq \text{cl} f^1(x_0; x)$  при  $x \in X$ . Сублинейная аппроксимация  $h$  функций  $f$  в точке  $x_0$  называется главной аппроксимацией, если не существует другая сублинейная аппроксимация  $h_1$ , такая, что  $h(x) \geq h_1(x)$  при  $x \in X$ . Главную сублинейную аппроксимацию функции  $f$  в точке  $x_0$ , обозначим через  $f^m(x_0; x)$ .

Если  $h(x)$  главная сублинейная аппроксимация функции  $f$  в точке  $x_0$ , то  $\partial h(0)$  назовем главным аппроксимативным субдифференциалом функции  $f$  в точке  $x_0$  и обозначим через  $\partial^m f(x_0)$ .

Положим (см.[8, с.94])  $f^{[1]+}(x_0; x) = \limsup_{(y, \alpha) \downarrow f^{x_0}, z \rightarrow x, t \downarrow 0} \frac{f(y + tz) - \alpha}{t}$ , где символ  $(y, \alpha) \downarrow f^{x_0}$  означает, что  $(y, \alpha) \in E(f)$ ,  $y \rightarrow x_0$ ,  $\alpha \rightarrow f(x_0)$ .

Далее будем считать, что главная сублинейная аппроксимация  $h(x)$  функции  $f$  в точке  $x_0$  дополнительно удовлетворяет неравенству:  $h(x) \leq f^{[1]+}(x_0; x)$  при  $x \in X$ .

Если  $t \rightarrow f(t, x)$  измеримая функция, то считаем, что  $t \rightarrow h(t, x)$  и  $t \rightarrow f^m(t, x_0; x)$  также измеримые функции.

**Лемма 2.1.** Если  $f$  липшицева функция в окрестности  $x_0$ , то существует непрерывная главная сублинейная аппроксимация функции  $f$  в точке  $x_0$ .

Лемма 2.1 доказана в [4, лемма 1.2.3].

Обозначим  $\partial^m f(t, x, y, z) = \partial^m f_t(x, y, z)$  и  $\nabla f(t, x, y, z) = \nabla f_t(x, y, z)$ .

**Теорема 2.1.** Пусть отображение  $t \rightarrow f(t, x, y, z)$  измеримо в  $[t_0, T]$ , существуют функции  $k(\cdot) \in L_1[t_0, T]$  и  $c(\cdot) \in L_p[t_0, T]$ , где  $pp' = p + p'$ , числа  $k_0 > 0$  и  $\alpha > 0$  такие, что

$$|f(t, x, y, z) - f(t, x_1, y_1, z_1)| \leq k(t)(|x - x_1| + |y - y_1|) + c(t)|z - z_1|,$$

$$|\varphi(z_0, z_1, z_2, z_3) - \varphi(u_0, u_1, u_2, u_3)| \leq k_0(|z_0 - u_0| + |z_1 - u_1| + |z_2 - u_2| + |z_3 - u_3|)$$

при  $|x - \bar{x}(t)| \leq \alpha$ ,  $|x_1 - \bar{x}(t)| \leq \alpha$ ,  $|y - \dot{\bar{x}}(t)| \leq \alpha$ ,  $|y_1 - \dot{\bar{x}}(t)| \leq \alpha$ ,  $z, z_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $|z_0 - \bar{x}(t_0)| \leq \alpha$ ,  $|u_0 - \bar{x}(t_0)| \leq \alpha$ ,  $|z_1 - \dot{\bar{x}}(t_0)| \leq \alpha$ ,  $|u_1 - \dot{\bar{x}}(t_0)| \leq \alpha$ ,  $|z_2 - \bar{x}(T)| \leq \alpha$ ,  $|u_2 - \bar{x}(T)| \leq \alpha$ ,  $|z_3 - \dot{\bar{x}}(T)| \leq \alpha$ ,  $|u_3 - \dot{\bar{x}}(T)| \leq \alpha$ , главная сублинейная аппроксимация  $F_t(z)$  функции  $f(t, z)$  в точке  $(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$  измеримо по  $t$  и  $\bar{x}(t)$  минимизирует функционал (1.1) в  $W_{p,2}^n([t_0, T])$ . Тогда существуют функции

$\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$ ,  $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$ , числа  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$  такие, что  $\dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0, \psi_1(T) = 0$  и

$$1) (\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t), -\psi_0(t) - \psi_1(t) - c_2 - c_1 t) \in \partial^m f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)),$$

$$2) (\dot{\psi}_0(t_0) + c_1, -\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial^m \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)).$$

**Доказательство.** В силу  $\Phi_0(\bar{x}) \leq \Phi_0(x)$  при  $x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ . Легко проверяется, что функционал  $\Phi_0(x)$  удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки  $\bar{x}(\cdot)$  в  $W_{p,2}^n[t_0, T]$ . Применяя лемму Фату (см. [9, с.97]) имеем, что

$$\Phi_0^+(\bar{x}; x) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\Phi_0(\bar{x} + \lambda x) - \Phi_0(\bar{x})) \leq \varphi^+(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T); x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \\ + \int_{t_0}^T f^+(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t); x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt,$$

$$\Phi_0^-(\bar{x}; -x) = \liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\Phi_0(\bar{x} - \lambda x) - \Phi_0(\bar{x})) \geq \varphi^-(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T); -(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T))) + \\ + \int_{t_0}^T f^-(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t); -(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))) dt.$$

По определению  $\Phi_0^1(\bar{x}; x) = \max\{\Phi_0^+(\bar{x}; x), -\Phi_0^-(\bar{x}; -x)\}$ .

Легко проверяется, что

$$\Phi_0^1(\bar{x}; x) \leq \varphi^1(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T); x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \int_{t_0}^T f^1(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t); x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt.$$

По лемме 2.1 существует непрерывная главная сублинейная аппроксимация  $h(x)$  функции  $\varphi(x)$  в точке  $(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$ . По лемме 2.1 также существует непрерывная главная сублинейная аппроксимация  $F_1(z)$  функции  $f(t, z)$  в точке  $(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$ . Так как главная сублинейная аппроксимация  $F_1(z)$  функции  $f(t, z)$  в точке  $(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$  измеримо по  $t$ , то из предложения 8.1.1 [6, с.233] следует, что  $F_1(z)$  нормальный интегрант.

Положим

$$\varphi^m(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T); x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) = h(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \text{ и} \\ f_1^m(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t); x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)).$$

Ясно, что

$$cl \varphi^1(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T); x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \leq h(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)), \\ cl f^1(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t); x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) \leq F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))$$

при  $x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ . Поэтому функция  $\bar{v}(t) = 0$  также минимизирует функционал

$$I_0(x) = h(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \int_{t_0}^T F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt$$

в  $W_{p,2}^n[t_0, T]$ . Легко проверяется, что при условии теоремы 2.1 функционал  $I_0(x)$  удовлетворяет условиям следствия 1.1. Поэтому существуют функции  $\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$ ,  $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$  и числа  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$  такие, что

- 1)  $(\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t), -\psi_0(t) - \psi_1(t) - c_2 - c_1 t) \in \partial^m f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$ ,
- 2)  $(\dot{\psi}_0(t_0) + c_1, -\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial^m \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$ ,
- 3)  $\dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0, \psi_1(T) = 0$ .

Теорема доказана.

Аналогичным образом с помощью субдифференциала Кларка

можно получить необходимое условие экстремума.

Пусть выполняются условия теоремы 2.1 и кроме того  $\bar{x}(\cdot) \in C^2([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ , функция  $f$  непрерывна в точке  $(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$  и непрерывно дифференцируема в точке  $(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$ , функция  $\varphi$  непрерывно дифференцируема в точке  $(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$ . Тогда из соотношения 1) теоремы 2.1 следует, что

$$(\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t), -\psi_0(t) - \psi_1(t) - c_2 - c_1 t) \in \nabla f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)).$$

Поэтому

$$\ddot{\psi}_0(t) = f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)), \quad (2.1)$$

$$-\dot{\psi}_1(t) = f_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)), \quad (2.2)$$

$$-\psi_0(t) - \psi_1(t) - c_2 - c_1 t = f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)). \quad (2.3)$$

Из равенства (2.3) следует, что

$$-\dot{\psi}_0(t) - \dot{\psi}_1(t) - c_1 = \frac{d}{dt} f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)). \quad (2.4)$$

Учитывая (2.2) в (2.4) получим, что

$$-\dot{\psi}_0(t) - c_1 = \frac{d}{dt} f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) - f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)). \quad (2.5)$$

Из (2.1) и (2.5) следует, что

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) - f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) \right) + f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) = 0.$$

Пусть функция  $f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$  непрерывно дифференцируема по  $t$ . Тогда имеем

$$\frac{d^2}{dt^2} f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) - \frac{d}{dt} f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) + f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) = 0.$$

Так как функция  $\varphi$  непрерывно дифференцируема, то из соотношения 2) теоремы 2.1 имеем

$$(\dot{\psi}_0(t_0) + c_1, -\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) = \nabla \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)).$$

Поэтому

$$\dot{\psi}_0(t_0) + c_1 = \varphi_{x(t_0)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)), \quad (2.6)$$

$$-\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2 = \varphi_{\dot{x}(t_0)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)), \quad (2.7)$$

$$-c_1 = \varphi_{x(T)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)), \quad (2.8)$$

$$c_1 T + c_2 = \varphi_{\dot{x}(T)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)). \quad (2.9)$$

Из (2.3) следует, что

$$-\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2 = f_x(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \ddot{\bar{x}}(t_0)).$$

Тогда имеем  $f_x(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \ddot{\bar{x}}(t_0)) = \varphi_{\dot{x}(t_0)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$ .

Из (2.3) и из соотношения 3) теоремы 2.1 следует, что  $-c_2 - c_1 T = f_x(T, \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T), \ddot{\bar{x}}(T))$ . Тогда из (2.9) получим, что

$$f_x(T, \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T), \ddot{\bar{x}}(T)) = -\varphi_{\dot{x}(T)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)).$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что

$$\frac{d}{dt} f_x(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \ddot{\bar{x}}(t_0)) - f_x(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \ddot{\bar{x}}(t_0)) = -\varphi_{x(t_0)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)).$$

Из (2.5) и (2.8) следует, что



$$\frac{d}{dt} f_{\ddot{x}}(T, \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T), \ddot{\bar{x}}(T)) - f_{\ddot{x}}(T, \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T), \ddot{\bar{x}}(T)) = \varphi_{x(T)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)).$$

Таким образом доказано следующее следствие.

**Следствие 2.1.** Если функция  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  и их частные производные по  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  непрерывны в открытом множестве  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3n}$ , а функция  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно дифференцируема в открытом множестве  $V \subset \mathbb{R}^{4n}$  и пусть  $\bar{x}(\cdot) \in C^2([t_0, T], \mathbb{R}^n)$  таковы, что  $(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) \in U$  при  $t \in [t_0, T]$  и  $(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)) \in V$ ,  $f_{x^{(k)}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) \in C^k([t_0, T], \mathbb{R}^n)$  при  $k = 0, 1, 2$  и  $\bar{x}(\cdot) \in C^2([t_0, T], \mathbb{R}^n)$  является локальным минимумом задачи (1.1), то

$$\frac{d^2}{dt^2} f_{\ddot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) + f_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) = 0$$

и выполняются следующие условия трансверсальности

$$f_{\ddot{x}}(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \ddot{\bar{x}}(t_0)) = \varphi_{\dot{x}(t_0)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)),$$

$$f_{\ddot{x}}(T, \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T), \ddot{\bar{x}}(T)) = -\varphi_{\dot{x}(T)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)),$$

$$\frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \ddot{\bar{x}}(t_0)) - f_{\dot{x}}(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \ddot{\bar{x}}(t_0)) = -\varphi_{x(t_0)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)),$$

$$\frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(T, \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T), \ddot{\bar{x}}(T)) - f_{\dot{x}}(T, \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T), \ddot{\bar{x}}(T)) = \varphi_{x(T)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)).$$

**Замечание 2.1.** Пусть  $f: [t_0, T] \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  нормальный интегрант,  $\varphi: \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$  функция,  $a: [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp } \mathbb{R}^n \cup \{\emptyset\}$ ,  $M_0$  и  $M_1$  непустые множества в  $\mathbb{R}^n$ .

Рассмотрим минимизацию функционала

$$\Phi_0(x) = \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt, \quad (2.10)$$

среди всех решений задачи

$$\ddot{x}(t) \in a(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad (2.11)$$

$$x(t_0) \in M_0, \quad \dot{x}(t_0) \in M_1, \quad x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]. \quad (2.12)$$

Ясно, что задачи (2.10)-(2.12) можно привести к минимизации функционала

$$\Phi(x, y) = \varphi(x(t_0), y(t_0), x(T), y(T)) + \int_{t_0}^T f(t, x(t), y(t), \dot{y}(t)) dt,$$

среди всех решений задачи

$$\dot{y}(t) \in a(t, x(t), y(t)), \quad \dot{x}(t) = y(t)$$

$$(x(t_0), y(t_0)) \in M_0 \times M_1, \quad (x(\cdot), y(\cdot)) \in W_{p,1}^{2n}[t_0, T].$$

Отметим, что последняя задача является частным случаем экстремальной задачи для дифференциальных включений (см. [3], [4]).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вариационная задача содержащая вторые производные неизвестных функций, I. Вестник, 2021 (в печати)
2. Садыгов М.А. Об одной экстремальной задаче, заданной на пространстве Соболева. Известия АН Азербайджанский ССР, 1985, №5. С.25-33.
3. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач. Баку: Элм, 2002, 125 с.
4. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 359 p.
5. Обен Ж.П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988, 264 с.
6. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979, 400 с.
7. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 479 с.
8. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988, 280 с.
9. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987, 760 с.

## AXTARILAN FUNKSIYANIN İKİNCİ TƏRTİB TÖRƏMƏSİ DAXİL OLAN VARIASIYA MƏSƏLƏSİ, II

M.A.SADIQOV, A.M.SADIQOV

### XÜLASƏ

Axtarılan funksiyanın ikinci törəməsi daxil olan variasiya məsələsinin ekstremum üçün zəruri və kafi şərtlər alınır. Müəllifin daxil etdiyi subdiferensialın köməyi ilə naməlum funksiyaların ikinci törəməsi daxil olan qabarıq olmayan ümumiləşmiş variasiya məsələsinə baxılır və ekstremum üçün zəruri şərt alınır.

**Açar sözlər:** zəruri şərt, Lipschitz funksiya, subdiferensial.

## VARIATION PROBLEM CONTAINING SECOND DERIVATIVES OF UNKNOWN FUNCTIONS, II

M.A.SADYGOV, A.M.SADYGOV

### SUMMARY

Necessary and sufficient conditions for an extremum for a variational problem containing the second derivatives of unknown functions are obtained. With the help of the subdifferential introduced by the author, a nonconvex generalized variational problem containing the second derivatives of unknown functions is considered, and the necessary condition for an extremum is obtained.

**Keywords:** necessary condition, Lipschitz function, subdifferential.

УДК 519.14

## О СЕМЕЙСТВЕ МОМЕНТОВ ПЕРВОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ УРОВНЯ МАРКОВСКИМ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДЕНИЕМ, ОПИСЫВАЕМЫМ ОБОБЩЕННОЙ СХемой АВТОРЕГРЕССИИ

**Т.Э.ГАШЫМОВА**

*Бакинский Государственный Университет*  
*tarana0202@gmail.com*

*В работе доказаны усиленный закон больших чисел и теорема о равномерной интегрируемости для семейства моментов первого пересечения уровня марковского случайного блуждания описанного обобщенной схемой авторегрессии.*

**Ключевые слова:** схема авторегрессии, марковское случайное блуждание, моменты первого пересечения.

**1. Введение.** Пусть на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, F, P)$  задана последовательность независимых случайных величин  $\xi_n$ ,  $n \geq 1$ , с  $E\xi_n = 0$  и  $\sigma_n^2 = D\xi_n < \infty$ .

Обобщенная схема авторегрессии задается равенством ([1])

$$X_n = \beta X_{n-1} + \xi_n, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

где  $\beta \in R = (-\infty, \infty)$  - некоторое фиксированное число и начальное значение  $X_0$  не зависит от последовательности  $\{\xi_n\}$  ([2]).

Хорошо известно, что ([1],[2],[3]) для независимых одинаково распределенных случайных величин схема (1) называется процессом авторегрессии первого порядка (AR(1)).

Процесс  $X_n$ ,  $n \geq 0$  описывает линейную марковскую модель, которая играет важную роль в прикладных вопросах теории случайных процессов ([3],[10]). Задача о нахождении статистической оценки для неизвестного параметра  $\beta$  по результатам наблюдений  $X_0, X_1, \dots, X_n$  изучается в работах [3] и [9].

В работе [9] для схемы (AR(1)) с инновацией  $\{\xi_n\}$  с  $E\xi_n = 0$  и  $D\xi_n = \sigma^2 < \infty$  по методу наименьших квадратов показано, что статистическая оценка для параметра  $\beta$  имеет вид

$$\beta_n = \frac{T_n}{S_n},$$

где

$$T_n = \sum_{k=1}^n X_k X_{k-1}$$

и

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_{k-1}^2.$$

Для схемы (AR(1)) в работе [3] (см. также [9]) доказано, что в условиях  $E\xi_1 = 0$ ,  $E\xi_1^2 = 1$ ,  $EX_0^2 < \infty$  и  $|\beta| < 1$  выполняется усиленный закон больших чисел типа Колмогорова:

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{\beta}{1 - \beta^2} \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (2)$$

и

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{1 - \beta^2} \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

В работе [9] доказано, что в схеме (AR(1)) имеет место центральная предельная теорема для  $\beta_n$ : если  $|\beta| < 1$ ,  $EX_0^2 < \infty$ ,  $E\xi_1 = 0$ ,  $E\xi_1^2 < \infty$ , то для  $x \in R$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n}(\beta_n - \beta) \leq x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right), \quad (4)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\beta_n = \frac{T_n}{S_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \beta \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Отметим, что схема (1) рассматривается в [2], где доказано, что сходимость (5) имеет место в более общей постановке.

Найдем по методу наименьших квадратов статистическую оценку для параметра  $\beta$  обобщенной схемы (1).

С этой целью рассмотрим функцию

$$\psi(\beta) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{X_k - \beta X_{k-1}}{\sigma_k} \right)^2$$

от параметра  $\beta \in R$  и найдем точку минимума, т.е. решим уравнение

$$\psi'(\beta) = 0.$$

Имеем

$$-\frac{2X_{k-1}}{\sigma_k} \sum_{k=1}^n \left( \frac{X_k - \beta X_{k-1}}{\sigma_k} \right) = 0,$$

или

$$-\sum_{k=1}^n \frac{X_k X_{k-1}}{\sigma_k^2} + \beta \sum_{k=1}^n \frac{X_{k-1}^2}{\sigma_k^2} = 0.$$

Отсюда учитывая, что  $\psi''(\beta) > 0$ , находим, что статистическая оценка по методу наименьших квадратов для параметра  $\beta$  имеет вид

$$\theta_n = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{X_k X_{k-1}}{\sigma_k^2}}{\sum_{k=1}^n \frac{X_{k-1}^2}{\sigma_k^2}}.$$

Как видно, для схемы (AR(1))  $\beta_n = \theta_n$ .

В [2] доказано, что если выполняются условия

$$\sup_k \frac{\sigma_{k-1}^2}{\sigma_k^2} < \infty \quad (6)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} E \min\left(\frac{\xi_k^2}{\sigma_k^2}, 1\right) = \infty, \quad (7)$$

то имеет место сходимость почти наверное

$$\theta_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \beta \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Сходимость (8) позволяет изучить некоторые асимптотические свойства семейства моментов первого пересечения

$$\tau_a = \inf\{n \geq 1 : Z_n \geq a\} \quad (9)$$

уровня  $a \geq 0$  марковским случайным блужданием

$$Z_n = n\theta_n, \quad n \geq 1.$$

Подобные семейства (9) изучены в работах ([5]–[8]) для схемы (AR(1)).

В настоящей заметке доказываются усиленный закон больших чисел типа Колмогорова и теорема о равномерной интегрируемости для семейства (9).

## 2. Формулировка и доказательство основных результатов.

Имеет место

**Теорема 1.** Пусть  $\xi_n, n \geq 1$  - последовательность независимых случайных величин с  $E \xi_n = 0$  и  $\sigma_n^2 = D\xi_n < \infty$ . Если выполняются условия (6) и (7), то

$$\frac{\tau_a}{a} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\beta} \text{ при } n \rightarrow \infty$$

для всех  $\beta \in (0, \infty)$ .

**Доказательство.** Сначала докажем, что  $P(\tau_a < \infty) = 1$  для всех  $a \geq 0$ .

Условия (6) и (7), как показано в работе [2], обеспечивают выполнения сходимости

$$\theta_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \beta \text{ при } n \rightarrow \infty$$

или

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \beta \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Ясно, что для  $\beta > 0$  из (10) вытекает, что

$$P\left(\sup_n Z_n = \infty\right) = 1.$$

Тогда по определению величины  $\tau_a$  имеем

$$P(\tau_a < \infty) = P\left(\sup_n Z_n \geq a\right) = 1.$$

Из (9) вытекает, что

$$\lim_{a \rightarrow \infty} P(\tau_a \leq n) = \lim_{a \rightarrow \infty} P\left(\max_{1 \leq k \leq n} Z_k \geq a\right) = 0$$

для всех фиксированных  $n \geq 1$ . Это означает, что выполняется сходимость по вероятности  $\tau_a \xrightarrow{P} \infty$  при  $a \rightarrow \infty$ . Следовательно, имеет место сходимость почти наверное  $\tau_a \xrightarrow{\text{п.н.}} \infty$  при  $a \rightarrow \infty$ , так как величина  $\tau_a$  как функции от  $a$  возрастает.

Далее докажем, что

$$\frac{Z_{\tau_a}}{\tau_a} \xrightarrow{\text{п.н.}} \beta \quad \text{при } a \rightarrow \infty. \quad (11)$$

С этой целью положим

$$A = \{\omega: \tau_a \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \infty\}, \quad B = \left\{\omega: \frac{Z_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta\right\} \quad \text{и} \quad C = \left\{\omega: \frac{Z_{\tau_a}}{\tau_a} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \beta\right\}.$$

Нетрудно видеть, что событие  $A \cap B$  влечет за собой событие  $C$ , т.е.  $A \cap B \subset C$ . Тогда, учитывая, что  $P(A) = 1$ ,  $P(B) = 1$  и  $P(AB) = 1$  из неравенства  $P(C) \geq P(AB)$  получаем  $P(C) = 1$ .

Таким образом, доказана сходимость (11).

Теперь утверждение доказанной теоремы вытекает в силу (11) из следующего двустороннего неравенства

$$\frac{Z_{\tau_{a-1}}}{\tau_a} < \frac{a}{\tau_a} \leq \frac{Z_{\tau_a}}{\tau_a},$$

которое выполняется в силу определения семейства  $\tau_a$ ,  $a \geq 0$ , равенством (9).

**Замечание.** Отметим, что утверждение теоремы 1 носит название усиленного закона больших чисел для  $\tau_a$  и оно доказано лишь для случая  $0 < \beta < 1$  в схеме  $AR(1)$ .

В следующей теореме даны достаточные условия для равномерной интегрируемости семейства  $\frac{\tau_a}{a}$ ,  $a > 0$ .

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия теоремы 1 и для некоторого  $\varepsilon \in (0, \beta)$  ряд сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\theta_n - \beta < -\varepsilon) < \infty. \quad (12)$$

Тогда существует некоторое  $a_0 > 0$ , такое, что семейство  $\frac{\tau_a}{a}$ ,  $a \geq a_0$  равно-

мерно интегрируемо.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующий результат.

**Следствие.** В условиях теорем 1 и 2 имеет место

$$E \tau_a \sim \frac{a}{\beta} \quad \text{при } a \rightarrow \infty. \quad (13)$$

**Доказательство теоремы 2.** Для  $\varepsilon \in (0, \beta)$  положим

$$n_a = \left[ \frac{a}{\beta - \varepsilon} \right] + 1$$

и фиксируем некоторое число  $a_0 > 0$ . По определению равномерной интегрируемости семейства  $\frac{\tau_a}{a}$ ,  $a \geq a_0 > 0$  выполняется следующее соотношение

$$\sup_{a \geq a_0} \int_{\left\{ \frac{\tau_a}{a} > c \right\}} \frac{\tau_a}{a} dP \rightarrow 0 \quad \text{при } a \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Для выполнения (14) достаточно показать, что для  $n \geq n_a$

$$\int_{\tau_a > n} \tau_a dP = \int_{\{\omega \tau_a > n\}} \tau_a dP \rightarrow \infty \quad \text{при } a \rightarrow \infty \quad (15)$$

так как  $\frac{\tau_a}{a} \leq \frac{\tau_a}{a_0}$  для  $a \geq a_0$  и в (14) можно полагать  $c \sim \frac{n}{a_0}$ .

Ясно, что имеем

$$\begin{aligned} \int_{\tau_a > n} \tau_a dP &= E \tau_a J(\tau_a > n) = (n+1)P(\tau_a = n+1) + \\ &+ (n+2)P(\tau_a = n+2) + \dots = n(P(\tau_a = n+1) + P(\tau_a = n+2) + \dots) + \\ &+ P(\tau_a = n+1) + 2P(\tau_a = n+2) + 3P(\tau_a = n+3) + \dots = \\ &= nP(\tau_a > n) + \sum_{k=1}^{\infty} P(\tau_a \geq n+k) = nP(\tau_a > n) + \sum_{m=n}^{\infty} P(\tau_a > m). \end{aligned} \quad (16)$$

Из определения величины  $\tau_a$  вытекает, то

$$P(\tau_a > n) \leq P(Z_n < a).$$

Нетрудно видеть, что для  $n \geq n_a$  имеем  $a < n(\beta - \varepsilon)$ . Поэтому для  $n \geq n_a$  находим

$$P(\tau_a > n) \leq P(Z_n < n(\beta - \varepsilon)) = P(\theta_n < \beta - \varepsilon). \quad (17)$$

Отсюда, в силу (12), имеем  $\sum_{m=n}^{\infty} P(\tau_a > m) \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$ .

Из (12) и (17) вытекает, что  $E \tau_a < \infty$  для  $a \geq 0$ . Следовательно,  $nP(\tau_a > n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда из (16) вытекает (15). Таким образом, теорема 2 доказана.

Асимптотика (13) вытекает в силу теорем 1 и 2 из хорошо известной теоремы о сходимости семейства равномерно интегрируемых случайных величин [4].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков А.А. Несколько замечаний о распределении времени первого выхода и оптимальной остановке  $AR(1)$ -последовательностей // Теория вероятностей и ее приложения, 2008, т.53, в.3, с.458-471.
2. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1988.

3. Melfi V.F. Nonlinear Markov renewal theory with statistical applications // The Analyse of Probability, 1992, 20 (2), p.751-753.
4. Gut A. Stopped random walks // Limit theorems and applications, Springer, New-York, 1988.
5. Rahimov F.H., Ibadova I.A., Farhadova A.D. Limit theorem for first passage times in the random walk described by the generalization of the autoregressive process // Uzbek Mathematical journal, 2020, №4, p.102-110.
6. Rahimov F.H., Ibadova I.A., Farhadova A.D. Limit theorem for a family of the first passage times of a parabola by the sums of the squares autoregression process of order one // Uzbek Mathematical journal, 2019, №2, p.81-88.
7. Rahimov F.H., Abdurakhmanov V.F., Hashimova T.E. On the asymptotic of the mean a value of the moment of first level-crossing by the first order auto regression process (AR(1)) // Transaction of NAS of Azerbaijan, 2014, XXXIV (4), p.93-96.
8. Рагимов Ф.Г., Гашимова Т.Э., Кулиева А.В. О равномерной интегрируемости семейства моментов первого пересечения нелинейной границы случайным блужданием, описываемым процессом авторегрессии // Journal of Baku Engineering University, volume 3, №2, 2019, с.84-90.
9. Pollard D. Convergence of Stochastic Processes. New-York, 1984.
10. Meyn S., Tweedle R. Markov Chains and Stochastic Stability // Springer, Kerlay, 1993.

**ÜMUMİLƏŞMİŞ AVTOREQRESSION SXEMLƏ TƏSVİR OLUNAN MARKOV  
TƏSADÜFİ DOLAŞMASININ SƏVIYYƏSİ BİRİNCİ DƏFƏ KƏSMƏ ANLARI  
AİLƏSİ HAQQINDA**

**T.E.HƏŞİMOVA**

**XÜLASƏ**

İşdə ümumiləşmiş avtoregression sxemlə təsvir olunan Markov təsadüfi dolaşmasının səviyyəni birinci dəfə kəsmə anları ailəsi üçün güclənmiş böyük ədədlər qanunu və bu ailənin müntəzəm inteqrallanması haqqında teorem isbat edilir.

**Açar sözlər:** avtoregression sxem, Markov təsadüfi dolaşma, birinci dəfə kəsmə anı.

**ON THE FAMILY OF FIRST PASSAGE TIMES FOR LEVEL  
BY THE MARKOV RANDOM WALK, DESCRIBED BY THE GENERALIZATION  
OF THE AUTOREGRESSIVE ON SCHEME**

**T.E.HASHIMOVA**

**SUMMARY**

In this article are proved strong law of large numbers of the family of the first passage times for level by the Markov random walk, described by the generalization of autoregressive scheme and theorem on the inifomly integrebility for the family of this first passage times.

**Keywords:** autoregressive on scheme, Markov random walk, first passage time.



## МЕХАНИКА

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА РАЗРАБОТКИ  
ГАЗОКОНДЕНСАТНЫХ ЗАЛЕЖЕЙ В РЕЖИМЕ ИСТОЩЕНИЯ

<sup>1</sup>Х.А.ФЕЙЗУЛЛАЕВ, <sup>2</sup>Г.Э.САМЕДОВА, <sup>2</sup>Н.М.ФЕЙЗУЛЛАЕВА  
<sup>1</sup>SOCAR, Нефтегазовый научно-исследовательский проектный институт,  
<sup>2</sup>НАНА, Институт Нефти и Газа  
feyzullayevxasay@gmail.com, aliyeva.gulshan85@gmail.com  
fnesibe60@gmail.com

*Предложена гидродинамическая модель оптимизации процесса разработки газоконденсатных месторождений в режиме истощения и на его основе исследована минимизация потери конденсата за счет перераспределения расходов газа по отдельным скважинам на примере VII горизонта газоконденсатного месторождения Булла-дениз. Показано, что по сравнению режима разработки месторождения на истощение, как оптимальный вариант, возможно существенное увеличение добычи конденсата за счет уменьшения внутрипластовых перетоков и предотвращения связанного с ними, дополнительного выпадения конденсата в режиме разработки на истощение.*

**Ключевые слова:** газоконденсатное месторождение, минимизация потерь конденсата, конденсатогазовый фактор, регулирование дебита добывающих скважин, расчетные и фактические данные разработки.

Известно что, основная причина снижения извлечения конденсата в процессе разработки месторождения является выпадение тяжелых углеводородов ( $C_{5+}$ ) при снижении давления в газоконденсатной системе ниже давления начала конденсации ( $p_{н.к}$ ). Это происходит при разработке месторождения на “истощение” (без применения методов поддержания пластового давления (ППД)). Вследствие этого, значительная часть выпавшего в пласте конденсата “теряется” для добычи из-за того, что находится ниже порога своей гидродинамической подвижности. Как результат этого, в пластах разрабатываемых месторождений остается до 65-70% начальных запасов конденсата [1-3].

Одной из существенных проблем разработки газоконденсатных месторождений является повышение конденсатоотдачи пластов. Для достижение достаточно высоких значений газоконденсатоотдачи нуждается в совершенствовании существующих методов воздействия на пласты газоконденсатных месторождений и поиске новых технологий за счет под-

держания в них пластового давления и, тем самым, предотвращение выпадения конденсата в пластах, так и путем извлечения уже выпавшего в пластах ретроградного конденсата.

Прогнозирование эффективности разработки газоконденсатных месторождений в сложных природных условиях с учетом неоднородного геологического строения пластов при фильтрации многокомпонентных углеводородных смесей с фазовыми переходами, возможно только применением методов математического моделирования. Поиск наилучшего варианта разработки месторождения обычно осуществляется на основе перебора некоторого количества вариантов. Понятно что, такой поиск перебора позволит найти действительно оптимальный вариант разработки.

Сказанное определяется тем, что отсутствуют эффективные алгоритмы оптимизации процесса разработки газоконденсатных месторождений на базе математических моделей, максимально учитывающие особенности процессов, происходящих в пластах. Вместе с тем, именно такие решения важны для практики разработки залежей природных углеводородов.

В работе делается попытка минимизировать потери конденсата в пласте, за счет перераспределения расходов газа по отдельным скважинам при различных режимах разработки месторождения в режиме истощения.

Строгое решение данной проблемы требует исследование двух взаимосвязанных следующих задач: задачи фильтрации газоконденсатной смеси в пласте и задачи оптимизации максимальной добычи газового конденсата. Вводим их последовательно.

**Постановки задачи фильтрации и алгоритм ее решения.** Процесс разработки был исследован на базе модели двухфазной многокомпонентной фильтрации с учетом фазовых переходов. Используя допущение о локальном термодинамическом равновесии фаз, справедливости обобщенного закона Дарси и пренебрегая влиянием капиллярных, диффузионных сил и гравитацией, изотермическую фильтрацию многокомпонентной смеси в газоносной толщине при работе системы эксплуатационных и нагнетательных скважин можно описать следующей системой уравнений [2,4,5]:

$$\nabla \left[ \left( \frac{k h f_{ж}(s_{ж}) \rho_{ж}}{\mu_{ж} M_{ж}} x_i + \frac{k h f_{г}(s_{г}) \rho_{г}}{\mu_{г} M_{г}} y_i \right) \nabla p \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ m h \left( \frac{\rho_{ж} s_{ж}}{M_{ж}} + \frac{\rho_{г} s_{г}}{M_{г}} \right) z_i \right] \pm \sum_{v=1}^n Q_i^v(t) \delta(x - x_v) \delta(y - y_v), \quad i = \overline{1, N}, \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

где  $f_{г}(s_{г})$  и  $f_{ж}(s_{ж})$  - относительная фазовая проницаемость, соответственно, для газовой и жидкой фаз;  $s_{г}$  и  $s_{ж}$  - коэффициент насыщенности пористой среды, соответственно, паровой и жидкой фазы;  $P$  - давление;

$t$  - время;  $x_i, y_i$

- молярные содержания  $i$ -го компонента в жидкой и газообразной фазах соответственно;  $Z_i$  - суммарное молярное содержание  $i$ -го компонента в смеси;  $\rho_z$  и  $\rho_{жс}$  - молярная плотность газообразной и жидкой фазы соответственно;  $M_{жс}$  и  $M_z$  - соответственно средние молекулярные веса жидкой и газовой фазы;  $Q_i^v(t)$  - плотность  $v$ -го источника (стока) по  $i$ -го компоненту в момент времени  $t$ ;  $x_v, y_v$  - координаты  $V$ -го элементарного источника (стока);  $n$  - число элементарных источников (стоков);  $D$  - область газоносности.

При прогнозировании показателей разработки газоконденсатной залежи приходится учитывать следующие начальные и граничные условия:

$$p(x, y, t)|_{t=0} = p_0(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (2)$$

$$z_i(x, y, t)|_{t=0} = z_i^0(x, y), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (x, y) \in D, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p(x, y, t)}{\partial n} \Big|_{\Omega} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

где  $\Omega$  - внешняя граница продуктивной зоны  $D$  залежи.

При решении задачи (1)-(4) должны выполняться следующие очевидные соотношения:

$$\sum_{i=1}^N x_i = \sum_{j=1}^N y_j = 1, \quad \sum_{i=1}^N z_i = 1. \quad (5)$$

При выполнении условия существования локального термодинамического равновесия система уравнений (1) замыкается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \rho_z &= \rho_z(p, T, z_1, z_2, \dots, z_{N-1}, z_N), & \rho_{жс} &= \rho_{жс}(p, T, z_1, z_2, \dots, z_{N-1}, z_N), \\ \mu_z &= \mu_z(p, T, z_1, z_2, \dots, z_{N-1}, z_N), & \mu_{жс} &= \mu_{жс}(p, T, z_1, z_2, \dots, z_{N-1}, z_N), \\ s_z &= 1 - s_{жс}, & s_{жс} &= \frac{(1-V)\rho_z M_{жс}}{(1-V)\rho_z M_{жс} + V\rho_{жс} M_z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Свойства газообразной и жидкой фаз (6), необходимые при решении системы уравнений (1)-(4), определяются по методикам, представленным в работах [2,4,6].

Для решения задач (1)-(6) был использован численный метод “неявный по давлению, явный по концентрации”, который подробно описан в [2,7]. На основе решения были проведены численные эксперименты и прогнозированы технологические показатели разработки.

Постановка задачи оптимизации и алгоритм ее решения: Требуется найти распределение отборов газа по эксплуатационному фонду скважин, при котором в каждый момент времени обеспечивается максимизация

объема извлеченного газового конденсата. При этом в газоконденсатной залежи имеется  $n$  эксплуатационных скважин. Запланированного уровня добычи обозначим  $Q(t)$ , а уровни отборов по каждой скважине –

$$Q_v(t) = \sum_{i=1}^N y_i Q_i^v(t), \text{ т.е.}$$

$$Q(t) = \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^N y_i Q_i^v(t)$$

На каждую величину  $Q_v(t)$  может накладываться ограничение, обусловленное добывными возможностями скважины  $Q_v(t) \leq Q_v^{\max}(t)$ .

Таким образом, задача о распределении отборов газа с целью достижения максимальной добычи газового конденсата за выбранный период времени формулируется как оптимизационная: требуется найти распределение отборов газа по эксплуатационному фонду скважин, которое в каждый момент времени обеспечивает максимум целевой функции

$$J(Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_n(t)) = \sum_{v=1}^n Q_v(t) \cdot C_v(p, T, z_1, z_2, \dots, z_{N-1}, z_N) \Rightarrow \max, \quad (7)$$

где  $C_v$  - содержание конденсата в газовой фазе.

Для максимизации функционала (7) предлагается использовать метод наискорейшего покоординатного спуска [8], что позволило получить результаты с большей точностью, а также достигать требуемую сходимость. Положим, что функция  $J(Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_n(t))$  по области определения всюду дифференцируема.

Согласно характеру установления процедуры спуска в градиентных методах оптимизации строится направление поиска и определяется шаг вдоль этого направления. Итерационная формула градиентных методов оптимизации имеет вид:

$$Q_v^{k+1} = Q_v^k - \lambda_v^k \frac{\partial J(Q_1^k, Q_2^k, \dots, Q_n^k)}{\partial Q_v^k}, \quad \frac{\partial J(Q_1^k, Q_2^k, \dots, Q_n^k)}{\partial Q_v^k} = \left. \begin{array}{c} \frac{\partial J}{\partial Q_1} \\ \frac{\partial J}{\partial Q_2} \\ \frac{\partial J}{\partial Q_{n-1}} \\ \frac{\partial J}{\partial Q_n} \end{array} \right\}, \quad (8)$$

где  $k = 0, 1, \dots$ , - номер итерации,  $\lambda_v^k \geq 0$  - шаг градиентного метода.

Приведенная задача (1)-(6), (7) представляет собой задачу условной оптимизации, т.е. на искомое решение налагаются дополнительные условия (ограничения на скважинах). Эта задача представляет собой систему  $n$  уравнений относительно искомых расходов  $Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_n(t)$  до-

бывающих скважин.

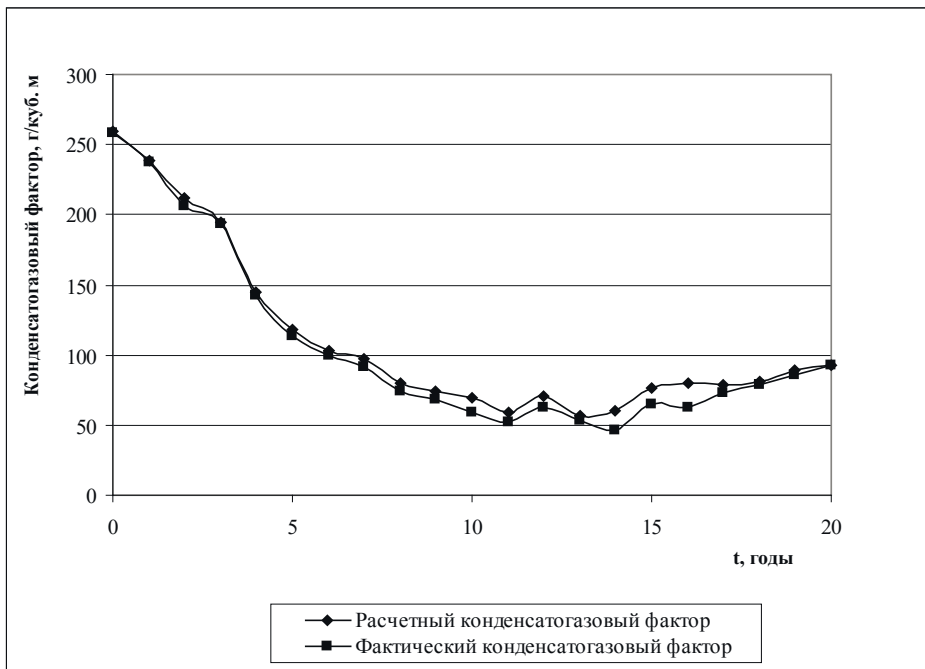
**Численные результаты регулирование дебитов эксплуатационных скважин в режиме истощение:** Рассмотрена задача безусловной оптимизации добычи газового конденсата при разработке реального месторождения (VII горизонта ГКМ Булла-дениз). Площадь области горизонта составляет 11,2 км<sup>2</sup>. За расчетный период разработка месторождения на истощения проводилась сначала с четвертями скважинами, а затем количество работающих скважин было увеличено до десяти. Начальное пластовое давление и температура залежи составляла соответственно 71,6 МПа и 102°С, давление начала конденсации пластовой углеводородной смеси приблизительно 71 МПа. Плотность жидкой фазы залежи 0,8 т/м<sup>3</sup>, молекулярная масса-160, конденсатосодержание газовой фазы 362 г/м<sup>3</sup>. Пористость коллекторов составляет 16,9% и проницаемость 0,042 мкм<sup>2</sup>.

Пластовая газоконденсатная смесь исследуемого объекта характеризовалась следующим начальным усредненным составом (молярная доля, %): метан 88,59; этан 4,11; пропан 1,47; бутан 0,77; пентан плюс вышекипящие 4,86; углекислый газ 0,2;

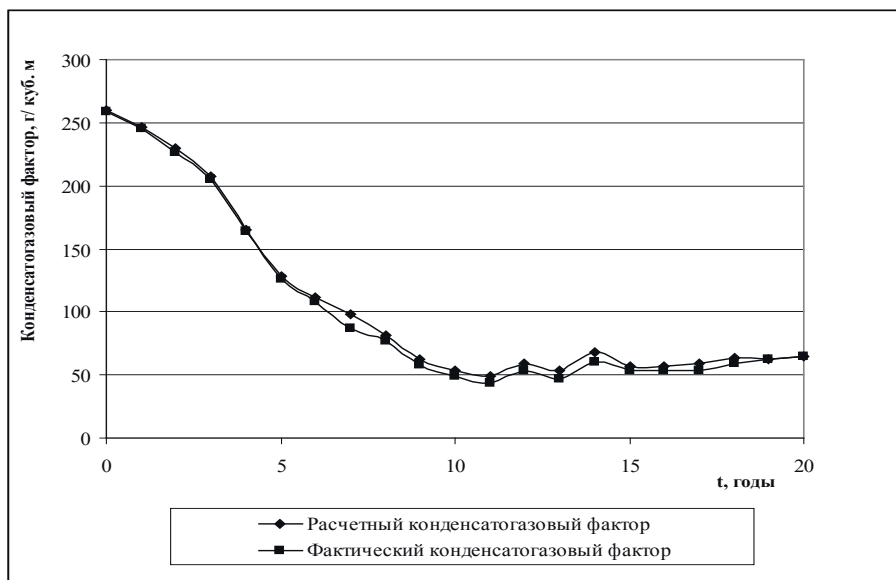
Достоверность прогнозирования технологических показателей и расчет вариантов разработки месторождений нефти и газа зависит от качества воспроизведения истории, то есть адаптации гидродинамических моделей углеводородных залежей по данным истории их разработки. Так как только лишь при полном совпадении расчетных и фактических данных разработки можно быть уверенным в достоверности прогнозируемых показателей [2,9-11].

Рассчитанные значения конденсатогазового фактора (КГФ) на каждой добывающей скважине сравнивались с соответствующими фактическими данными. При первоначальных расчетах погрешность в определении КГФ по различным скважинам составляла от 5 до 15%, что было вызвано погрешностью задания геологической модели, главным образом эффективной толщины и относительные фазовые проницаемости (ОФП). После анализа изменения КГФ на этих скважинах проведено уточнение модели, в процессе которой, исходя из физических соображений, увеличивали или уменьшали эффективную толщину и ОФП, где наблюдалось наибольшее отличие, и снова проводили расчет фильтрации многокомпонентной смеси. Таким образом, после нескольких итераций добивались того, чтобы среднее квадратичное отклонение в величине КГФ на каждой добывающей скважине не превышало 2–5%, после чего можно было считать, что модель уточнена и можно проводить оптимизацию разработки месторождения.

На рис.1-2 представлены сравнения расчетных и фактических данных конденсатогазового фактора для скважин 39 и 46 месторождения Булла-дениз.

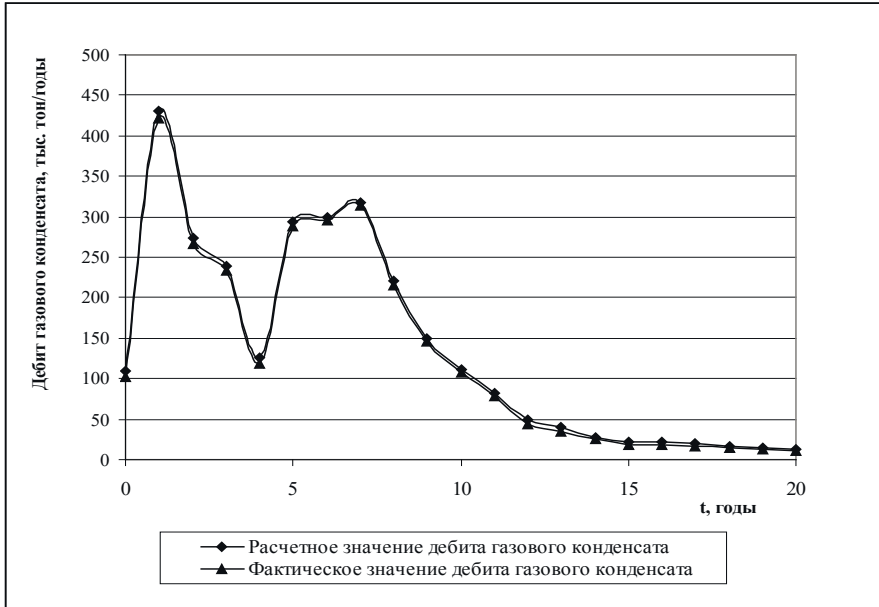


**Рис.1.** Сопоставление расчетных и фактических данных конденсатогазового фактора для скважины 39 VII горизонта месторождения Булла-дениз



**Рис.2.** Сопоставление расчетных и фактических данных конденсатогазового фактора для скважины 46 VII горизонта месторождения Булла-дениз

На рис. 3 представлено аналогичное сравнение для годовой добычи газового конденсата по всем добывающим скважинам этого месторождения.

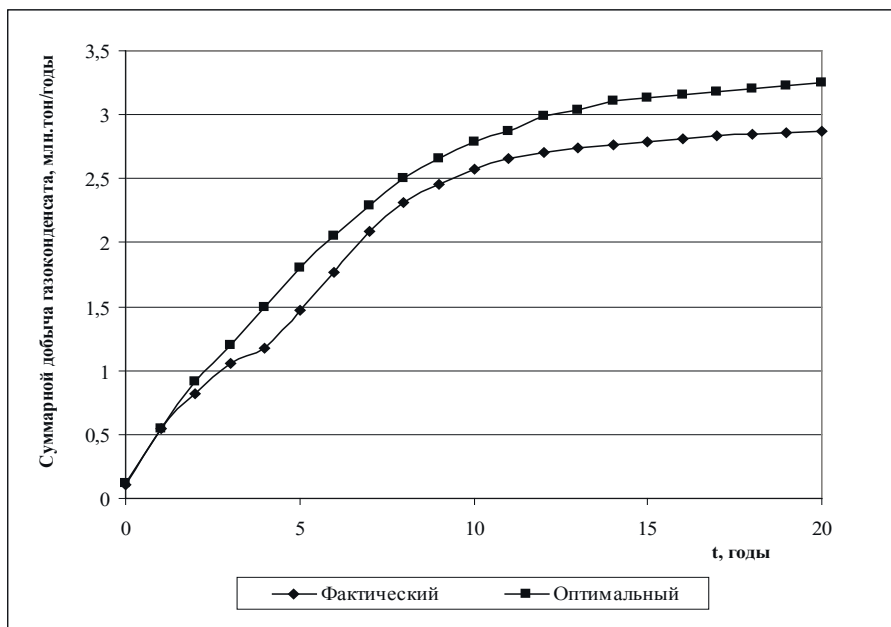


**Рис.3.** Сопоставление расчетных и фактических данных годовой добычи газового конденсата для всех добывающих скважин VII горизонта месторождения Булла-дениз

Сравнение расчетных и фактических кривых данных, в целом, показывает их хорошее соответствие, что свидетельствует об адекватности математической модели реальным условиям добычи.

Для того чтобы оценить степень влияния внутрипластовых переток на добычу газового конденсата в режиме разработки месторождения на истощение, были рассчитаны два различных варианта разработки - фактический и оптимальный. При расчете фактического режима разработки месторождения на истощение расходы добывающих скважин были приняты согласно фактическим данным для месторождения. При расчете оптимального режима разработки месторождения на истощение варьирование расходами касалось всех 10 эксплуатационных скважин, задействованных в разработке. При этом суммарная добыча газа была принята равной фактической для всего эксплуатационного фонда. Суммарный расчетный период составил 20 лет. Прогнозный расчет проведен с целью выбора оптимального режима, при котором общая добыча газового конденсата была бы максимальной, при этом шаг оптимизации принят  $\Delta T = 10$  суток. То есть в процессе оптимизации режима добычи на истощение расчет перераспределения расходов для действующего фонда всех скважин проводился на каждый 10 суток. Расчеты проводились без каких-либо ограничений на режим работы эксплуатационного фонда скважин. В некоторые моменты времени одновременно работали до 7-и скважин. Точность расчетов  $\varepsilon$  была принята  $\varepsilon = 10^{-3}$ . На рис. 4 представлены гра-

фики общей добычи газоконденсата для двух вариантов разработки месторождения на истощение. Из графика следует, что оптимальный вариант уже через несколько времени существенно превышает фактический и в середине рассматриваемого периода это превышение составляет более 0,221 млн. тон, к концу рассматриваемого периода это значение увеличивается почти в 2 раза. Оптимальный вариант за весь рассматриваемый период существенно выше фактического.

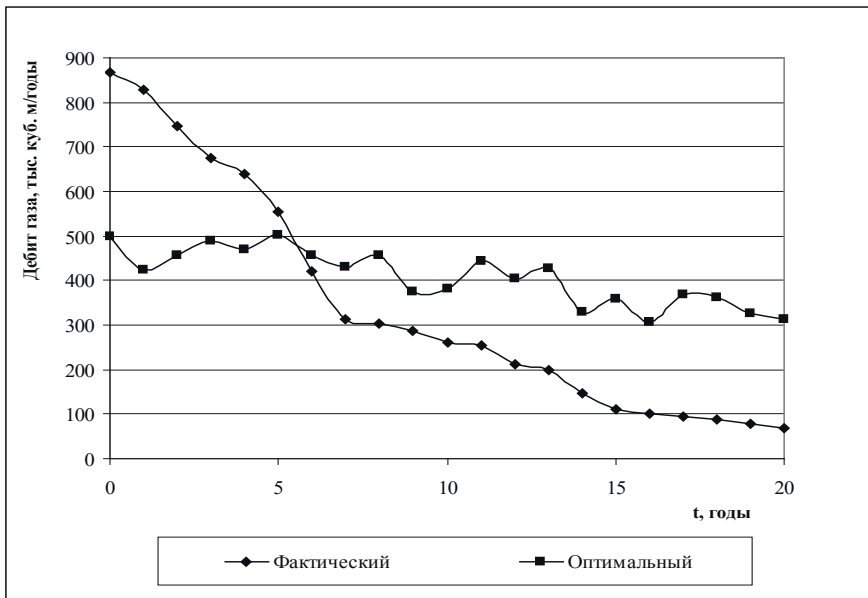


**Рис.4.** Суммарные добычи газового конденсата от времени разработки VII горизонта месторождения Булла-дениз

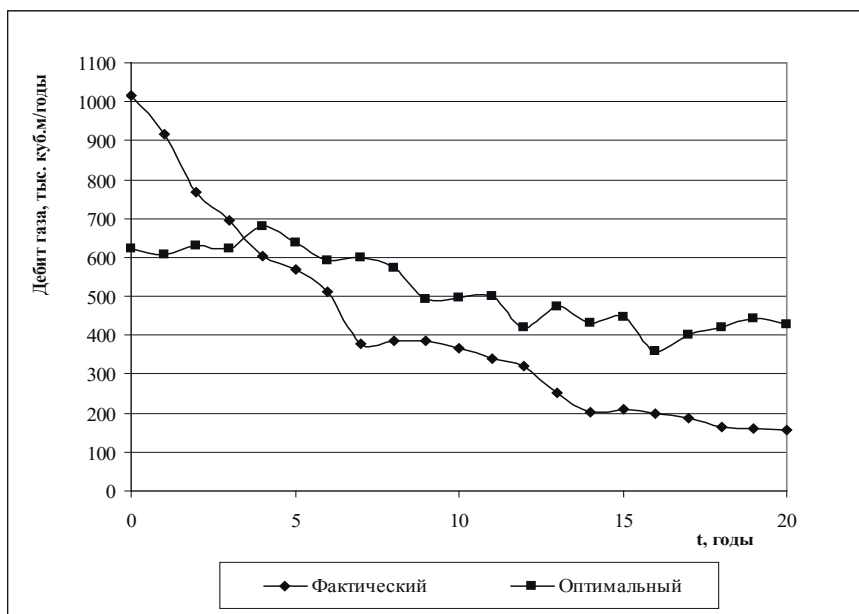
Влияние регулирования внутрипластовых перетоков на изменение поля давлений и КГФ (рис.5-6), путем задание дебитов эксплуатационных скважин, при оптимизации разработки месторождения на истощение приводит к выравниванию давлений внутри области и, как следствие, уменьшению внутрипластовых перетоков, а также связанного с этим дополнительного выпадения конденсата.

Из рис. 5-6 видно, что при фактической разработке горизонта большинство эксплуатационных скважин, как правило, работали в режиме, далеком от оптимального. Как следствие, увеличивался перепад давлений между нетронутой областью и добывающими скважинами, соответственно увеличивались внутрипластовые перетоки, в процессе которых и происходило выпадение конденсата. Этот факт и обуславливает широкие возможности для увеличения добычи газового конденсата при оптимизации путем регулирования дебитов добывающих скважин.





**Рис.5.** Зависимость дебита газа от времени разработки для скважины 39 VII горизонта месторождения Булла-дениз



**Рис.6.** Зависимость дебита газа от времени разработки для скважины 46 VII горизонта месторождения Булла-дениз

Таким образом, результаты расчетов показывают возможность использования оптимизации разработки действующих газоконденсатных месторождений с целью увеличения добычи газового конденсата. На примере VII горизонта газоконденсатного месторождения Булла-дениз

показано, что, путем управления внутрипластовыми перетоками и предотвращения дополнительного выпадения конденсата, в процессе добычи при режиме истощения месторождения можно определить оптимальный вариант, в соответствии которого возможно увеличение добычи более чем на 12,8%, т.е. извлечь за 20 лет разработки почти 0,3688 млн. тон конденсата дополнительно.

### **Выводы:**

На основе гидродинамической модели фильтрации двухфазной и многокомпонентной смеси углеводородов разработана методика регулирования фильтрационных внутрипластовых потоков с целью оптимального распределения дебитов добывающих скважин при разработке VII горизонта газоконденсатного месторождения Булла-дениз в режиме истощения. Установлено, что выравнивание давлений внутри фильтрационной области и, как следствие, уменьшение внутрипластовых перетоков позволяют увеличить добычу конденсата значительно по сравнению режима разработки месторождения на истощение.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Абасов М.Т., Аббасов З.Я., Джалалов Г.И., Фейзуллаев Х.А. Моделирование процесса разработки газоконденсатных залежей // Изв. НАН Азерб., серия Наук о Земле, 2006, №1, с.65-69
2. Фейзуллаев Х.А. Совершенствование моделирования гидрогазодинамических основ разработки глубокозалегающих газоконденсатных месторождений. Beau Bassin: Palmarium Academic Publishing, 2018, 228 с.
3. Гриценко А.И., Николаев В.А., Тер-Саркисов Р.М. Компонентоотдача пласта при разработке газоконденсатных месторождений. М.: Недра, 1995, 272 с.
4. Брусиловский А.И. Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа. М.: Грааль, 2002, 575 с.
5. Митлин В.С. Новые методы расчета воздействия обогатенного газа на газоконденсатный пласт: Дис. ... канд.тех.наук. ВНИИГАЗ, 1986, 157 с.
6. Многомерная и многокомпонентная фильтрация: Справочное пособие / С.Н.Закиров, Б.Е.Сомов, В.Я.Гордон, В.М.Палатник, П.А.Юфин. М.: Недра, 1988, 335 с.
7. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем: Пер. с английского. М.: Недра, 1982, 407 с.
8. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980, 520 с.
9. Фейзуллаев Х.А., Рзаева В.Г. Адаптация гидродинамической модели по данным истории разработки газоконденсатной залежи // Изв. АН Азерб., серия Наук о Земле, 2001, №2, с.19-21
10. Абасов М.Т., Джалалов Г.И., Мамедов А.М., Фейзуллаев Х.А. Об адаптации гидродинамических моделей течения углеводородных жидкостей в залежах по данным истории их разработки // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений, Москва, 2011, №11, с.46-53
11. Jalalov G.I., Kuliyeu G.F., Feyzullayev Kh.A., Damirov A.A. Parametrical identification of the filtration models of gas with condensed mixture // An international Journal Applied and computational mathematics, 2008, v.7, № 2, p.214- 222

# TÜKƏNMƏ REJİMLİ QAZKONDENSAT YATAĞININ İŞLƏNİLMƏ PROSESİNİN OPTİMALLAŞDIRILMASI

X.A.FEYZULLAYEV, G.E.SƏMƏDOVA, N.M.FEYZULLAYEVA

## XÜLASƏ

Tükənmə rejimində qazkondensat yataqlarının işlənməsinin optimallaşdırılması üçün hidrodinamik model təklif olunur və onun əsasında Bulla-dəniz qazkondensat yatağının VII horizontunun hər bir quyusu üzrə hasilatın yenidən paylanması hesabına kondensat itkilərinin minimallaşdırılması tədqiq edilmişdir. Optimal bir seçim olaraq işlənilmənin tükənmə rejimində laydaxili axınların azaldılması və onunla əlaqəli əlavə kondensat itkisinin qarşısının alınması hesabına kondensat hasilatının yatağın tükənmə işlənilmə rejimi ilə müqayisədə xeyli artmasının mümkün olduğu göstərilmişdir.

**Açar sözlər:** qazkondensatı yatağı, kondensat itkilərinin minimallaşdırılması, kondensatqaz amili, istismar quyularının debitinin tənzimlənməsi, işlənilmənin hesablanmış və faktiki məlumatları.

## OPTIMIZATION OF THE DEVELOPMENT OF GAS CONDENSATE DEPOSITS IN THE DEPLETION MODE

Kh.A.FEYZULLAEV, G.E.SAMEDOVA, N.M.FEYZULLAEVA

## SUMMARY

A hydrodynamic model is proposed for optimizing the development of gas condensate fields in depletion mode and, on its basis, minimization of condensate loss is investigated on the example of horizon VII of the Bulladeniz gas condensate field, due to the redistribution of gas flow rates among individual wells. It is shown that, as an optimal option, by reducing intra-reservoir flows and preventing additional condensate loss associated with them in the depletion development mode, it is possible to significantly increase condensate production compared to the depletion development mode of the field.

**Keywords:** gas condensate field, minimization of condensate losses, condensate-gas factor, regulation of production wells flow rate, calculated and actual development data.

**İNFORMATİKA****UOT 004:681.3:629.73****PREDİKTORUN ERKƏN DİAQNOSTİKADA ROLU****Ü.M.ƏLİZADƏ***AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutu**ulkeralizadeh@gmail.com*

*İşdə ən erkən diaqnostika pilləsi araşdırılır. Ultrasəs müayinəsi zamanı aşkar olunmuş törəmənin dinamikada izlənməsi üçün prediktor baxılmışdır, o üç əlamətdən ibarətdir: törəmənin sahəsi, ağırlıq mərkəzi və rəng palitrası. Törəmələrin tanınması və monitorinqi üçün program paketi işlənmişdir. Təsvirin emalından alınan nəticələr eksperimentlərlə, protokolla təsdiqlənmişdir.*

**Açar sözlər:** ultrasəs şüaları, sürətlərin tanınması, prediktor, qapalı kontur.

**Giriş.** İnformasiyalaşdırma cəmiyyətin qanunauyğun inkişafıdır. Cəmiyyətin informasiyalaşdırılması qlobal sosial prosesdir. İnformasiya cəmiyyətinin formalaşması müasir dövrə xas olan cəhətlərdən biridir. İnformasiya ilə təmin olunma insana tələbatlarını ödəmək üçün bir vasitədir. Cəmiyyətin informasiyalaşdırılması və kompüterləşdirilməsi informasiya texnologiyalarının geniş tətbiqinə səbəb olmuşdur [1].

Hal-hazırda informasiya texnologiyalarının inkişafı və insan fəaliyyətinin bütün sahələrinə tətbiqi prosesi gedir. İnformasiya texnologiyalarının inkişafı bütün sahələrdə olduğu kimi tibb sahəsinə də müsbət təsir göstərir. Bu baxımdan pasiyentlərə teleməsləhətlərin verilməsi, real zamanda xəstənin vəziyyətinin müşahidəsi və nəzarəti, fizioloji parametrlərin məsafədən fiksə edilməsi, müxtəlif müalicə müəssisələri arasında xəstələr haqqında informasiya mübadiləsi, real zamanda əməliyyatların aparılması və s. təbabəti keyfiyyətə yeni səviyyəyə çatdırır. Diaqnozun qoyulması üçün bir sıra vasitələrdən, o cümlədən laborator analizlər, funksional diaqnostikadan istifadə olunur. Laborator analizlər orqanizmdə gedən fiziki-kimyəvi prosesləri əks etdirir. Orqanların morfoloji struktur dəyişikliklərini müşahidə etmək üçün diaqnostik aparatlardan istifadə olunur. Bu aparatlardan ultrasəs, rentgen, kompüter tomoqrafi, maqnit-rezonans tomoqrafi və s. göstərmək olar [2].

Süni intellekt nəzəriyyəsinin obrazların tanınması sistemlərində təsvirlərlə işləmək üçün müxtəlif metodlar mövcuddur və bu səpkidə tədqiqatlar

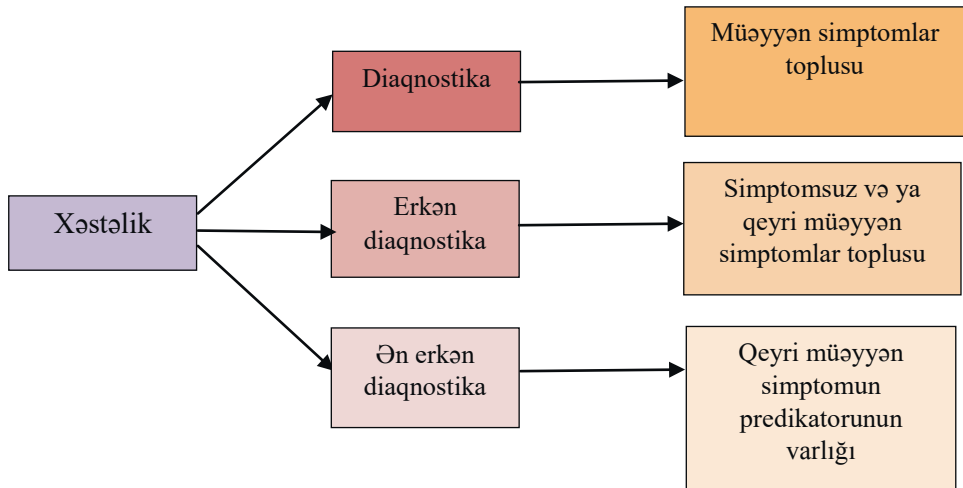
davam etdirilir. Lakin obrazların tanınması məsələlərində universal həll yoxdur. Çünki hər bir təsvirin öz xarakter əlamətləri vardır və obrazlar bir-birindən bu əlamətlərə görə fərqlənir, təsnifat olunur, sistemləşdirilir.

Təsvirlərlə işləmə tibb sahəsində geniş yayılmış istiqamətlərdəndir. Buraya elektrokardiogramlar, rentgen, ultrasəs, maqnit-rezonans müayinəsi və s. təsvirləri aid etmək olar. Məsələn, tibb sahəsində rentgen təsvirlərinin emal edilməsi üçün müxtəlif metodlar tətbiq olunur. Bu cür proqramlardan istifadə edilmə həkimlərə xəstəliyin erkən mərhələsində diaqnoz qoymağa imkan verir. Rentgen təsvirlər orqanizmin anatomik strukturunu göstərir, sümüyün strukturunu və orqanların formasını, onların yerləşməsini dəqiqləşdirməyə imkan verir. Rentgen şüaları sümükləri işıqlandırarsa da, yumşaq toxumalar haqqında informasiya vermir. Yumşaq toxumalı orqanlar haqqında məlumatı almaq üçün ən geniş yayılan üsullardan biri ultrasəs müayinəsidir. Ultrasəs müayinəsinin tibbdə istifadə edilmə məqsədi lazımı daxili orqanın ümumi təsvirinin yaradılmasıdır. USM orqanizmin yumşaq toxumalarının müayinəsi üçün effektivdir. Orqanizmin səthi strukturları olan əzələ, vətər və s. üçün yüksək tezlikli dalğalardan (7-18 MHz) istifadə olunur. Orqanizmin daha dərin strukturları, qara ciyər, böyrəklər daha kiçik dalğalarla (1-6 MHz) müayinə olunur, lakin orqanizmin toxumalarına onlar daha dərindən nüfuz edirlər. USM-də toxumaların tərkibini və xassələrini xarakterizə edən əsas parametrlər exogenlikdir. Ultrasəsin əsasını exolokasiya prinsipi, yəni toxumaların ultrasəs dalğalarını əks etmək qabiliyyəti təşkil edir. İnsan bədəninin bütün orqanları ultrasəsi özünəməxsus əks etdirir. Sonoqraf müayinə zamanı ağ-qara təsvir görünür. Orqanın sıxlığı çox olduqca təsvir daha ağ olur. Belə ki, maye qara rənglə görünür.

Ultrasəsin köməyi ilə təsvirin yaradılması 3 mərhələdə baş verir: ultrasəs dalğasının yaranması, exo siqnalların alınması və bu siqnalların emalı. Bunlardan ilk iki mərhələ texniki həllə əlaqədardır. Üçüncü mərhələdə bilavasitə təsvirin tanınması prosesi yerinə yetirilir.

Ultrasəs müayinəsi (USM) US dalğaları ilə insan orqanizminin təhlükəsiz, ağrısız və informativ müayinə metodudur. İşdə US təsvirlərinin alınması üçün TOSHIBA NEMIO XG SSA-580A və TOSHIBA-SAL-38B cihazlarından alınan təsvirlər istifadə edilmişdir.

**2. Məsələnin qoyuluşu və həlli.** Robert Teylorun “Çətin diaqnoz” (1992) monoqrafiyasında natamam və qeyri-müəyyən simptomlar toplusu varlığında düzgün diaqnozun qoyulmasının önəmliyi məsələsi əsas yer tutur. Təqdim olunan iş daxili orqanların USM vasitəsilə alınmış təsvirlərdə simptomuz şəraitdə qapanmış və ya qapanmaya meyilli olan konturlarının təyin olunmasına həsr olunub. Bu sinif məsələlər çətin diaqnoz qoyulan məsələlər sinfinə aid edilir ki, onu ən erkən diaqnostika adlandırdıq (şəkl.1).



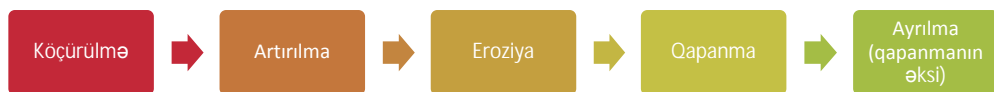
**Şək. 1.** Ən erkən diaqnostika

Bu məsələnin həllinin ən əlverişli variantını program paketi şəklində işləməyi üstün tutaraq, aşağıdakı program paketini təklif edirik:



**Şək.2.** Program paketinin konseptual modeli

1. Obyektlərin oxşarlığın əsaslanan "**k-nearest neighbor**" ("**k-yaxın qonşu**").
2. Sərhəd qiymətlərinə əsaslanaraq təsvirin iki və daha çox hissələrə bölünməsində əsas rol oynayan **Threshold (sərhəd)** metodu.
3. Sərhədlərin müəyyən edilməsi üçün diskriminant meyar əsasında həll edilən **Canny edge defection (sərhədlərin aşkar edilməsi)** metodu.
4. Qradyent metodu sərhəd piksellərinin vektoru istiqamətində lokal maksimumun tapılması üçün istifadə edilən **Gradient metod (qradyent metodu)**. Bu metod əsasında sərhədlərin tapılması Qaus hamarlama filtrasiyası; hər pikseldə parlaqlıq qradyentinin tapılması; maksimal piksellərin tapılması; maksimal piksellərin filtrasiyası əməliyyatlar ardıcılığının köməyiylə yerinə yetirilir.
5. Parçalanmaların aşkar edilməsi və aradan götürülməsi; sərhəd emalı; sahələrin emalı baza konsepsiyasını özündə əks etdirən **Watershed (suyun ayrılma üsulu)** metodu.
6. **Saussion blur** (küydən təmizlənmə üsulu). təsvirdə küyün azaldılması və aradan götürülməsi təsvirin filtrlənməsi deməkdir, bu isə təsvirin istənilən emal prosedurasını nəzərdə tutur. Bu zaman girişə rastr təsviri verilir, çıxışda da rastr təsviri formalaşır. Lakin çox vaxt təsvirin küydən filtrlənməsi lazım gəlir. Küyün filtrlənməsi real təsvir üzərində müəyyən alqoritmlərlə "təmizləmə" aparıldıqdan sonra öz xarakteristikaları ilə "küylənməmiş" ilkin təsvirə yaxın olan təsvir almaqdır. "Küylənmə" real obyektlərin təsvirində təhriflərin alınmasıdır.
7. Təsvirlərin emalı sahəsində sərhədlərin ayrılması üçün istifadə olunan, çox vaxt daha mürəkkəb və dəqiq Kenni metodunun addımlarından biri kimi tanınan **Sobel (sərhədlərin ayrılması) metodu**.
8. Boz şkala təsvirin boz rəngin qradiasiyalarında rəng modelinə çevrilməsi üçün istifadə olunan **RGB** rəng modeli.
9. Sərhəd pikselləri qradyent vektoru istiqamətində olan qradyentin lokal maksimumuna çatan nöqtələrini müəyyən edən **Kenni Non-Maximum Suppression (maksimumların yatırılması) metodu** [3,4,5].
10. Riyazi morfologiyada emal mərhələsində istifadə olunan naziltmə, qalınlaşdırma metodları xüsusilə maraq kəsb edir. Riyazi morfologiyada ilkin binar təsvir ikilik qara-ağ nöqtələrin (piksellərin) və 0 və 1-lərin çoxluğundan ibarətdir. Riyazi morfologiya aparatı üçün giriş verilənləri kimi iki təsvir olur: emal olunan və əməliyyatın növündən və həll olunan məsələdən asılı olaraq xüsusiləşdirilmişdir. Bu cür xüsusi təsvir primitiv və ya struktur elementi adlanır və ikilik təsvir kimi (həndəsi) göstərilir. Bu element emal olunan təsvirdən kiçik olur və istənilən struktur və ölçüyə malik ola bilər. İşdə struktur elementi  $BOX[H_4, W_4]$  – verilmiş ölçülü düzbucaqlı şəkildə seçilib. Riyazi morfologiyada əsas baza əməliyyatları aşağıdakılardır:



Şək.3. Riyazi morfologiyanın baza əməliyyatları

Artırılma təsvirin sahəsini genişləndirir, eroziya onu kiçildir, qapanma sahənin daxili hissələrini qapayaraq sərhəd boyunca ayrılmaları aradan çıxarır, qırılma təsvirin sərhəddi yaxınlığında kənara çıxan kiçik fraqmentlərdən qurtulmanı və hamarlanma əməliyyatını həyata keçirir.

Müasir tibbi araşdırmalarda əsas vurğu diaqnostikaya, yəni simptomların toplusu vasitəsilə birqıymətli qərar vermək və erkən diaqnostikaya, yəni natamam simptomatika əsasında diaqnostika və proqnozlaşdırma məsələsinin həllinə yönəlib. Bizim araşdırmalar ən erkən diaqnostika dövrünü əhatə edir. Yəni hər hansı bir simptomatika mövcud deyil, lakin USM təsvirlərində kiçik ölçülü qapalı və ya qapanmaya meyilli konturların mövcudluğu şəraitində məsələyə müdaxilədən ibarətdir. Qapalı və ya qapanmaya meyilli kontur tibbi nöqtəyindənərdən simptomatsız keçən haldır. Onun varlığını və dinamikasını nəzarətdə saxlamaq üçün hər hansı parametrlərin aşkarlanması tələb olunur. Bu məqsədlə işdə prediktor anlayışı verilir və bu anlayış üçün üç əlamət təklif olunur. Bunlar əyri xətlərin qapanmış sahəsinin ölçüsü, əyri xətlərin fiqurun ağırlıq mərkəzinin təyini və qapanmaya meyilli sahənin teksturasının rəngidir [6].

**Ağırlıq mərkəzinin hesablanması.** Fiqurun ağırlıq mərkəzinin təyin edilməsi riyazi morfologiya üsulu ilə yeni müstəvidə alınmış fiqurun ilkin müstəvidə axtarılan fiqurla eyniliyini müəyyən etmək üçün tətbiq edilir. Ağırlıq mərkəzini aşağıdakı şərtlər daxilində hesablamaq mümkündür:

- Təsvir müstəvi üzərindədir;
- Bütün nöqtələrin kütləsi bir-birinə bərabərdir;
- Fiqur səthinin sıxlığı sabitdir (yəni vahid sahə kütləsi sabitdir).

$OXY$  koordinat oxunda kütlələri  $m_1, m_2, \dots, m_n$  olan  $A_1(x_1, y_1); A_2(x_2, y_2); \dots, A_n(x_n, y_n)$  nöqtələrlə təsvir olacaq. Onda ağırlıq mərkəzinin koordinatları aşağıdakı (1) düsturu ilə hesablanacaq:

$$X_0 = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (1)$$

$$Y_0 = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Burada  $X_i x m_i (i = \overline{1, n})$ , -  $OY$  oxuna nisbətən  $m_i$  kütləsinin statik anıdır;  $Y_i x m_i$  isə  $OX$  oxuna nisbətən  $m_i$  kütləsinin statik anıdır.



Alınmış fiqur  $OX$  oxu üzrə  $X=a$  və  $X=b$ ,  $OY$  üzrə –  $y=f_1(x)$  və  $y=f_2(x)$  xətləri ilə məhdudlaşıb. Səthin sıxlığını  $\delta$  ilə işarə edək.  $[a,b]$  parçasını  $n$  hissəyə bölək

$$a=x_1, <x_2, <x_3, \dots <x_n$$

Onda fiqur eni  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots \Delta x_n$  bərabər olan  $n$  zolağa bölünər:  $x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \dots = x_n = b$ , hər zolağın kütləsi bərabərdir  $m_i = S_i \delta$  ( $S_i - i$  zolağının sahəsi,  $\delta$  - zolağın sıxlığı).  $f_1(x)$  və  $f_2(x)$ -dən asılı olaraq hər zolaq əyrixətli fiqurdur. Hər zolağı  $A_i B_i C_i D_i$  düzbücaqlılarla əvəz edək, burada  $\Delta x_i$  düzbücaqlının əsası,  $h = f_2(\xi) - f_1(\xi)$  – hündürlüyüdür,  $\xi = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ . Belə olduqda zolağın kütləsi bərabərdir

$$\Delta m_i \approx \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i \quad (i = \overline{1, n}).$$

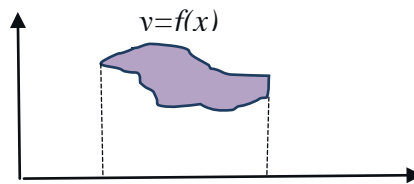
Sonda koordinatların dəqiqliyi üçün limitə keçək:

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} x_0 = \frac{\int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx} \quad (2)$$

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} y_0 = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f_2(x) + f_1(x)] [f_2(x) - f_1(x)] dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx} \quad (3)$$

**Sahənin hesablanması.** Sahənin hesablanması əyrixətli sərhədlə əhatə olunmuş sahə düsturu ilə hesablandığına görə daha dəqiq cavab verir.

Fiqur  $OX$  oxu üzərində  $x=a$  və  $x=b$  düz xətləri arasında yuxarıdan  $y=f(x)$  və aşağıdan  $y=g(x)$  funksiyaları ilə qapanıb (şəx. 4).



Şəx.4. Qapalı fiqurun alınması

USM təsvirindən təzə koordinatlarda filtrləmədən və binar morfologiya üsulunun tətbiqindən sonra alınmış qapalı konturla əhatə olunan fiqurun sahəsi sadə düsturla hesablanır:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

**Rəng modeli.** Fiqurun rənginin təyini informativ əlamətlərdən biri sayılır. Rəng modeli ideal fiqurun bütün səthi boyunca dəyişməzdir. Lakin prak-

tikada real obyektlərdən alınmış təsvirlərdə obyektə rəngin paylanması ideal olmur, rənglərin çalarları dəyişir. Fiqurun baza rəngi onun informativ əlamət kimi müəyyən edilməsində və fiqurun bircinsliyinin ayırd edilməsində vacibdir. Müasir US aparatları 1024-ə qədər boz rəngin çalarlarını qeyd etdiyi üçün orqanların real təsvirləri alınır. Lakin təcrübə göstərmişdir ki, boz rəngin çalarları 1024-ə qədər olan təsvirlərdə obyektlər yayılmış şəkildə olur. Rəng çalarlarının 0-dan 255-ə qədər dəyişməsi təsvirlər üçün daha optimaldır. US təsviri boz rəng çalarlarında əks edildiyi üçün orqanı uyğun olaraq alınmış qapalı konturun daxili hissəsinin rəngi araşdırılır. Boz rəngin çalarları ilə yaxşı işlədiyinə görə, işdə RGB rəng modeli araşdırılır.

RGB fərqli rənglər yaratmaq üçün üç rəngdən (red-qırmızı, green-yaşıl, blue-mavi) fərqli miqdarda əlavə olunmasına əsaslanaraq, bir əlavə rəng spektri yaradır. RGB rəng modelində (255, 255, 255), qara rəng (0, 0, 0) ilə kodlaşdırılır. Boz rəng şkalası red-qırmızı, green-yaşıl, blue-mavi rənglərinin bərabər qiymətləri ilə tünd bozdan açıq boza qədər dəyişir. Boz rəng RGB modelinin rəng kubunda diaqonal boyunca yerləşir və onun hər bir tərkib hissəsi boz rəngin çalarına bərabər olan eyni qiymətlər alır.

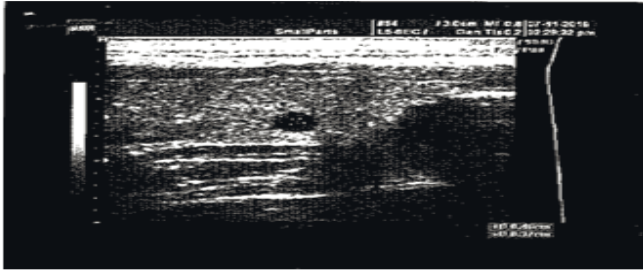
Qapalı konturun daxili rənginin parametrləri burada müəyyən zaman ərzində baş verən dəyişiklikləri izləməyə imkan verir və təsvirin informativ əlamətlərindən biri kimi fiksə olunur.

Təsvirdə alınmış fiqurun informativ əlamətləri təyin edildikdən sonra diaqnostika məsələsi öz həllini tapır və alınmış nəticənin dürüslüyü hesablanır. Növbəti ölçmələrdə bu üç əlamətlərdən heç olmasa birində növbəti ölçmə zamanı dəyişiklik müşahidə olunarsa, deməli proses dinamikadadır və ona nəzarət mütləqdir. Təklif olunan üsul diaqnozu təyin etmir, lakin həkimin diqqətini gələcəkdə baş verə bilən problemə yönəldir və bu halı monitorinqə qoyulmasını məsləhət görür. Biz burada xüsusi diqqət yönəldirik erkən və ən erkən diaqnostika vəziyyətlərinə, yəni natamam indikatorun və ya prediktorun mövcud olduğu hallara.

Sistemin iş qabiliyyəti bilavasitə USM təsvirləri üzərində yoxlanışdan keçmiş və 140-dan çox hadisə araşdırılmışdır. Məsələn kimi bir hadisəni araşdıraraq. Pasiyent C qalxanvari vəzinin US müayinəsindən keçmiş və aşağıdakı təsvir alınmış və protokolda məlumatlar qeyd olunmuşdur.

Burada sahənin ölçülərindəki fərq nəzərə çarpır: USM verdiyi sahə 14,8 bərabər, sistemdə isə sahə 13,2. Əlavə olaraq ağırlıq mərkəzinin koordinatları və rəngin RGB modelində ölçüləri verilib. Protokoldan da aydın görünür ki, müəyyən edilən monitorinqin tezliyi həkim tərəfindən müəyyən olunur.

**Nəticə:** Müstəvidə alınmış mürəkkəb təsvirlərdə qapalı konturların tanınması üçün proqram paketi təklif edilmişdir. Buraya daxil edilən üsullar vasitəsi ilə təsvir küylərdən təmizlənir, filtrlənmə əməliyyatları yerinə yetirilir, sərhədlər dəqiqləşir və seçilmiş klassifikatorlardan istifadə edərək riyazi morfologiya üsulu ilə tanıma başa çatır.



⊕

Nö	Tələb olunan məlumat	Təsvirdən alınan məlumat
1	Məlumatlar bankında qeydiyyat nömrəsi	XXXXXXXXXXXX
2	AAS	C
3	Xəstənin yaşı:	32
4	Cinsi	kişi
5	Orqan:	qalxanvari vəzi
6	Törəmənin olması:	var yox
7	Törəmənin sayı:	bir
8	Törəmənin ölçüsü :	d=4x3.7
9	Törəmənin sahəsi:	S = 13,2
10	Törəmənin ağırlıq mərkəzi:	(2,2)
11	Törəmənin rəngi RGB modelində:	30± 0,04
12	Həkim tərəfindən verilən son nəticə:	Qalxanvari vəzidə d=4x3,7 mm-lik miomatoz düyün
13	Sistem tərəfindən verilən son nəticə:	Qalxanvari vəzidə sahəsi 13,2 mm <sup>2</sup> ölçüdə miomatoz düyün
14	Dürüstlüyün əmsalı	
15	Monitorinq tezliyi:	3 aydan sonra təkrar USM
16	Tarix	15.11.2018
17	USM həkimin AAS	XXXXXXXXXXXX

Yeni xarakteristikalar təyin edilir. Əyrixətli kontur ilə qapanan sahə hesablanır, rəng palitrası və qapalı fiqurun ağırlıq mərkəzi təyin edilir. İnformasiya-tanım sisteminin protokolları tərtib edilib və USM həkimin verdiyi nəticədən əlavə yeni xarakteristikalar da təqdim edilir. Sistem, törəmələrin yaranma prosesini və onların inkişaf mərhələlərini izləməyə imkan yaradan alətdir. Yeni xarakteristikalar biomolekulyar səviyyədə elmi-tədqiqat işini aparan alimlərə araşdırmaların daha incə və dəqiq olmasına yararlı ola bilər.

### ƏDƏBİYYAT

1. Информатика: Учебник / Под ред. проф. Н.И.Макаровой. М.: Финансы и статистика, 2006, 768 с.
2. Абдуллаева Г.Г., Ализаде У.М. Распознавание сложных изображений на плоскости. // научный журнал «Достижения и проблемы современной науки». СПб., 2015, с.65-70.
3. Gonzales R., Woods R. Digital Image Processing (3rd Edition)/ - Pearson, 2008, 976 p.
4. Буй Т.Т.Ч., Спицын. В.Г. Анализ методов выделения краев на цифровых изображениях Доклады ТУСУРА, № 2 (22), часть 2, декабрь 2010, s.221.
5. Огнев И.В., Сидорова Н.А. Обработка изображений методами математической морфологии в ассоциативной осцилляторной среде //Технические науки. Информатика и вычислительная техника. №4, 2007, с.87-97.

6. Abdullayeva G.G., Alizade U.M. An Information Recognition System for Complex Images / ADCAIJ: Advances in Distributed Computing and Artificial Intelligence Journal Regular Issue, v. 8 N. 3 (2019), 79-93.

## **РОЛЬ ПРЕДИКАТОРОВ В РАННЕЙ ДИАГНОСТИКЕ**

**У.М.АЛИЗАДЕ**

### **РЕЗЮМЕ**

В работе исследуется самый ранний этап диагностики. Для прослеживания состояния обнаруженного новообразования, при ультразвуковом исследовании в динамике рассмотрен предиктор, который состоит из трех признаков: площадь новообразования, центр тяжести цветовая модель. Разработан пакет программ для распознавания и мониторинга новообразований. Полученные результаты обработки изображений подтверждены экспериментами и протоколами.

**Ключевые слова:** ультразвуковые лучи, распознавание образов, предиктор, замкнутая контур.

## **THE ROLE OF PREDICTORS IN EARLY DIAGNOSIS**

**U.M.ALIZADEH**

### **SUMMARY**

To trace the state of the detected growths, a predictor is considered in dynamics during ultrasound examination, which consists of three signs: area of the growth, the center of gravity, and the color model. A software package for the recognition and monitoring of gravity have been developed. The obtained results of image processing are confirmed by experiments and protocols.

**Keywords:** ultrasound irradiation, pattern recognition, predictor, closed contour.

## FİZİKA

УДК 621.382

**ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЕ МИКРОСТРУКТУРЫ МЕТАЛЛА  
МЕХАНИЗМ ПРОБОЯ ДИОДОВ С БАРЬЕРОМ ШОТТКИ****Ш.Г.АСКЕРОВ, И.М.ЭФЕНДИЕВА, Л.К.АБДУЛЛАЕВА,  
М.Г.ГАСАНОВ, Л.Ф.АГАМАЛИЕВА***Бакинский Государственный Университет, НИИ Проблем Физики  
l.k\_abdullayeva@mail.ru*

*Целью работы является исследование влияние микроструктуры металла на механизм геометрической пробоя диодов с барьером Шоттки. Показано, что в процессах, происходящих в контакте металл-полупроводник (КМП), металл является активным партнером, чем полупроводник. Полученные результаты можно объяснить в рамках теории сложных систем.*

**Ключевые слова:** контакт металл-полупроводник, диоды Шоттки, высота барьера, микроструктура, границы раздела, неоднородность, сложных систем.

**1.Введение** Контакты металл–полупроводник получили наибольшее распространение на практике. Рассмотрение контактов металла с полупроводником представляет интерес, поскольку они находят применение в качестве:

- выпрямляющих контактов в диодах Шоттки (ДШ);
- невыпрямляющих, или омических, контактов для подвода и отвода напряжений и токов в интегральные системы (ИС) и полупроводниковых приборах.

В отличие от р- n перехода в обратном направлении вольт-амперные характеристики (ВАХ) контакта металл-полупроводник имеют разнообразные формы, которые представлены на рис.1. В зависимости от соотношения работы выхода металла и полупроводника поведение КМП может быть как диодным, так и омическим. На рис.1 а – з представлены обратные ветви ВАХ диодов Шоттки, а на рис.1 д ВАХ омического контакта (ОК). Как видно из рисунков, наряду с известными диодными формами ВАХ с «жестким»(а) и «мягким» (г) пробоями, иногда наблюдается ВАХ с изломами (рис.1 б и в). ВАХ с изломами впервые наблюдалась Лепселтером и Зи [1], затем авторами работы [2,3].

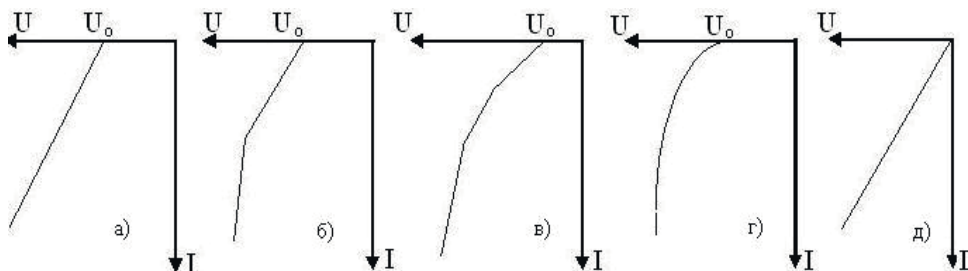


Рис 1. Обратные ветви ВАХ-а контакта металл -полупроводник

Эти редко встречаемые формы ВАХ заслуживают внимания и, как нам кажется, являются во-первых, ключом для понимания связи между представленными формами ВАХ и во-вторых, позволяют выявить специфику пробоя диодов Шоттки.

Известно, что при обратном смещенном р-п переходе обратный ток создается неосновными носителями заряда. При значительном увеличении обратного напряжения на р-п переходе генерация неосновных носителей может резко вырасти и в результате наступит пробой - то есть скачкообразное изменение тока при неизменном напряжении. В зависимости от причин его вызвавших, различают лавинный, туннельный и тепловой пробой.

**2.Теоретический анализ** Мы считаем, что разнообразные формы ВАХ диодов Шоттки не связаны с процессами, протекающими в полупроводниках, а связаны с микроструктурой пленки металла. Дело в том, что в отличие от приборов с р-п переходом, в случае ДШ одним из «партнеров» контакта обычно является пленка металла, которая во многих случаях имеет поликристаллическую структуру, как это показано на рис.2.

В случае контакта полупроводника с металлом теория Шоттки [4]. справедлива только тогда, когда граница раздела (ГР) контакта однородна, т.е. оба контактирующих материала имеют, например, монокристаллическую структуру. Однако, из-за поликристалличности пленки металла в большинстве практических случаев это условие нарушается.

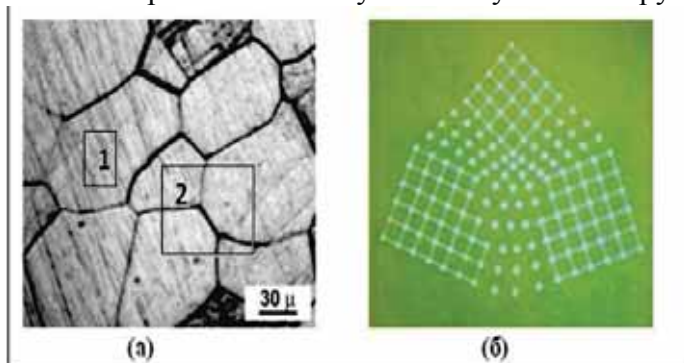


Рис. 2. Микроструктура поверхности поликристаллического металла на микронном (а) и атомном (б) уровнях

Работа выхода поликристаллического металла является функцией от координаты поверхности  $\Phi(x)$  и может меняться в широком диапазоне. Можно считать, что работа выхода  $\Phi_{л}$  металла постоянна в пределах отдельного кристаллита и скачкообразно, меняется при переходе от кристаллита к кристаллиту [5], как это схематично показано на рис.3 пунктирной линией.

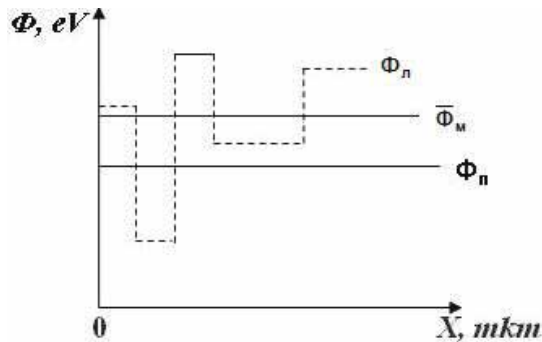


Рис.3. Зависимости работ выходов металла и полупроводника от координаты поверхности.

Здесь,  $\Phi_{п}$  - работа выхода монокристаллического полупроводника.  $\Phi_{л}$  - локальная работа выхода поликристаллического металла,  $\overline{\Phi_{м}}$  - работа выхода металла, усредненного по поверхности, которая определяется формулой [6]:

$$\overline{\Phi_{м}} = \frac{\sum_{i=1}^n \Phi_i S_i}{\sum_{i=1}^n S_i} \quad (1)$$

Здесь,  $\Phi_i$  и  $S_i$  работа выхода и площадь  $i$ -ого кристаллита.

На рис. 3 представлены изменения работы выхода поликристаллического металла и монокристаллического полупроводника по произвольному направлению поверхности  $OX$ . Там же еще показано экспериментальное (или предпочитаемое) значение работы выхода металла  $\overline{\Phi_{м}}$ , которое приводится в справочниках [7].

При сопоставлении усредненной по поверхности работы выхода металла  $\overline{\Phi_{м}}$  с работой выхода полупроводника  $n$  типа согласно теории Шоттки контакт должен обладать диодным свойствам, поскольку  $\overline{\Phi_{м}} > \Phi_{п}$ . Однако при сопоставлении локальной работы выхода металла с полупроводником этого сказать нельзя, поскольку условие Шоттки не выполняется для некоторых участков контакта, как это нетрудно заметить из рис.3.

**3.Методика** Таким образом, микроструктурная неоднородность металла переводит однородную систему КМП в сложную систему, которая состоит из параллельно соединенных многочисленных КМП, имеющих различные свойства и параметры. Известно, [8] что сложная система — система, состоящая из множества взаимодействующих составляющих (подсистем), вследствие чего сложная система приобретает новые свой-

ства, которые отсутствуют на подсистемном уровне.

Если все эти контакты обладают диодными свойствами, то очевидно, что каждый диод имеет различные значения высоты барьера, напряжения пробоя, площади контактов, последовательного сопротивления и других параметров. Ясно, что при приложении к такому контакту напряжения в обратном направлении, сперва будут пробиваться диоды с наименьшими напряжением пробоя, а с увеличением напряжения к пробую последовательно будут подключаться другие диоды с более высокими значениями напряжения пробоя. С ростом обратного напряжения растет число субдиодов, подключающихся в процессе пробоя. Другими словами, с ростом обратного напряжения растет площадь контакта участвующих в процессе пробоя.

**4. Результаты и их обсуждение** Для проверки справедливости вышеизложенного предположения на рис.4 представлены результаты модельных расчетов ВАХ ДШ, изготовленных с применением металла с поликристаллической структурой.

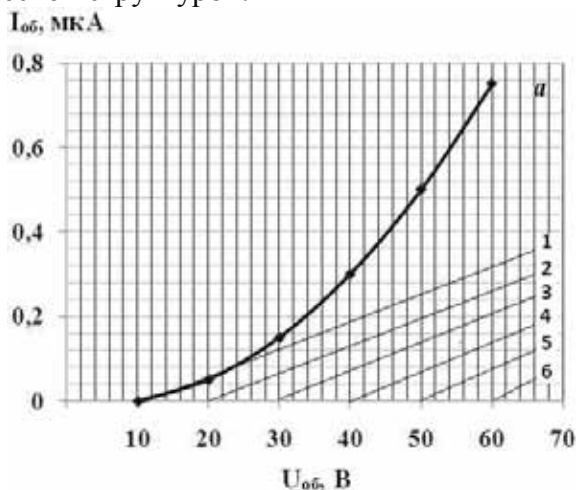


Рис. 4. ВАХ несколько параллельно соединенных субдиодов Шоттки, имеющих разные напряжения пробоя.

Предполагалось, что КМП состоит из 6-ти субдиодов, а ВАХ субдиодов, имеют различные значения напряжения (10В; 20В; 30В; 40В; 50В) пробоя. Для простоты считалось, что другие параметры диодов такие, как площадь, высота барьера и последовательное сопротивление, а также механизм протекания заряженных частиц через контакт, одинаковы.

Ясно, что при приложении обратного напряжения большего, чем 10В, будет пробиваться первый диод, в котором ток линейно растет с ростом напряжения. Когда обратное напряжение достигает 20В, пробивается и второй диод, и в результате суммирования токов наклон зависимости  $I_{об}(U_{об})$  растет. Очевидно, что с дальнейшим ростом обратного напря-



жения к процессу пробоя подключаются другие субдиоды.

Таким образом, в результате параллельного соединения диодов линейная ВАХ ДШ становится нелинейной, т. е. обладает новым свойством, не присущим субдиодам.

Взаимосвязь между обратным током и обратным напряжением выразить формулой:

$$I_{об} = k(U_{об} - U_{пр})^n \quad (2)$$

Здесь,  $n$  показывает степень нелинейности ВАХ. Для определения степени нелинейности  $n$  ВАХ в обратном направлении в логарифмическом масштабе, которая представлена на рис 5. В данном случае она равна  $n=2,09$  (а) и  $n=2,46$  (б).

Значение  $n$  зависит от степени неоднородности пленки металла. Меняя микроструктуру металла методом технологии, можно менять степень неоднородности и тем самым степень нелинейности ВАХ ДШ.

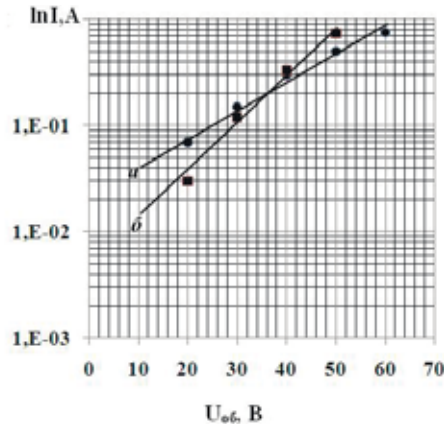
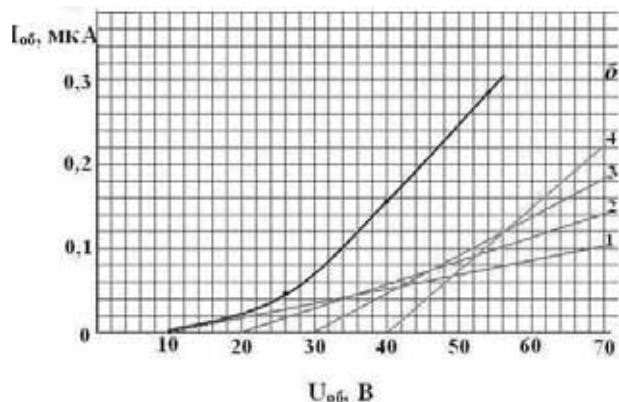


Рис.5. Зависимость обратной ветви ВАХ ДШ в логарифмическом масштабе

На рис.6 представлены результаты другого модельного расчета, где ДШ состоит из 4 субдиодов, имеющих различные площади. И здесь полагаем, что все параметры субдиодов одинаковы кроме напряжения пробоя и площадей. Предполагается, что диоды, имеющие высокие напряжения пробоя имеют большую площадь.

Как нетрудно увидеть из рис.6 с ростом обратного напряжения обратный ток субдиодов линейно растет, и в процесс пробоя подключаются диоды, имеющие большие напряжения пробоя и площади. В результате сложения линейных обратных токов ВАХ ДШ в обратном направлении становится нелинейной (сплошная линия).

Таким образом, из вышесказанного можно заключить, что ВАХ ДШ в обратном направлении с одним изломам (рис.1б) являются следствием параллельно соединенных двух субдиодов, имеющих различные значения напряжения пробоя, площади и высоты барьера.



**Рис.6.** ВАХ нескольких параллельно соединенных диодов Шоттки, имеющих разные напряжения пробоя.

После пробивания первого диода обратный ток растет согласно линейно, и когда обратное напряжение достигает напряжения пробоя второго диода, пробивается второй диод и, соответственно, обратные токи диодов складывается, в результате чего в ВАХ появляется изгиб (рис.1б). Аналогическим образом можно объяснить ВАХ ДШ с двойным изгибом (рис. 1в).

Если обозначить через  $dS$  площадь контакта напряжения пробоя, который находится в интервале от  $U_o$  до  $U_o + d U_o$ , то очевидно, что  $dS$  можно выразить формулой:

$$dS = S_o f(U) dU_o,$$

Здесь,  $f(U)$  является функцией распределения поверхности по напряжением пробоя;  $S_o$  –общая площадь контакта.

Меняя микроструктуры, можно менять  $f(U)$  и, соответственно, ВАХ ДШ в обратном направлении. Другими словами, нелинейность ВАХ ДШ появляется под влиянием неоднородности границы раздела КМП. Меняя неоднородность границы раздела КМП, можно управлять свойствами (параметрами и формами) диодов Шоттки.

Учитывая все вышесказанное, полученные результаты можно объяснить в рамках сложных систем, так как параллельно соединенные ДШ создают сложную систему. Здесь можно сделать и другой вывод о том, что ДШ, изготовленные с применением поликристаллических металлов, являются удобным объектом для проверки выводов теории сложных систем. Поскольку многие сложные явления в реальном мире не является воспроизводимые, а в случае диодов Шоттки с поликристаллической пленки металла можно воспроизводить сложные системы.

**5.Заключение.** Изучено влияние неоднородности ГР на ВАХ ДШ в обратном направлении. Показано, что в ДШ металл играет активную роль и наряду с полупроводником является равноправным партнером контакта. Получено, что нелинейность ВАХ в обратном направлении является результатом неоднородности ГР.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зи С.М. Физика полупроводниковых приборов. М: Мир, 1984, часть 1, с.34-450.
2. Аскеров Ш.Г. Микроэлектроника. Эт.сер.93. т.1, 1977, №17, с.63-66.
3. Аскеров Ш.Г. Физика неоднородного контакта металл –полупроводник. Lambert Academic Publishing, 2017, p.77.
4. Askerov S.Q., Abdullayeva L.K., Hasanov M.H. Origin of discrepancies in the experimental values of the barrier height at metal–semiconductor junctions. *Semiconductors*, 2017, 51, 591-593.
5. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. М.-Ижевск, 2007, с.17-543.
6. Askerov S.G., Abdullayeva L.K., Hasanov M.H. The influence of the metal microstructure on the breakdown mechanism of Schottky diodes. *J. Mater Phys Chem*, 2018, 1(3), 1.
7. Holovatch Y., Kenna R., Thurner S. Complex systems: physics beyond physics. *Eur J. Phys*, 2017, 38(2), 023002

## ŞOTTKİ BARYERLİ DİODLARDA METALİN MİKROSTRUKTURUNUN DEŞİLMƏ MEKANİZMİNƏ TƏSİRİNİN ÖYRƏNİLMƏSİ

Ş.Q.ƏSGƏROV, İ.M.ƏFƏNDİYEVƏ, L.K.ABDULLAYEVƏ,  
M.H.HƏSƏNOV, L.F.AĞAMALIYEVƏ

### XÜLASƏ

Təqdim olunan işdə Şottki baryerli diodlarda metalın mikrostrukturunun deşilmə mexanizminə təsiri öyrənilmişdir. Göstərilmişdir ki, metal-yarımkeçirici kontaktında baş verən proseslərdə metal yarımkeçiriciyə nəzərən daha aktiv tərəfdaşdır. Əldə olunan nəticələr mürəkkəb sistemlər nəzəriyyəsinə görə izah edilmişdir.

**Açar sözlər:** Metal-yarımkeçirici kontaktı, Şottki diodu, çəpərin hündürlüyü, mikrostruktur, ayrılma sərhəddi, qeyri-bircinslik, mürəkkəb sistem

## INVESTIGATION OF THE MECHANISM OF BREAKDOWN OF SCHOTTKY DIODES DEPENDING ON THE METAL MICROSTRUCTURE

Sh.G.ASKEROV, I.M.AFANDIYEVƏ, L.K.ABDULLAEVƏ,  
M.G.GASANOV, L.F.AGAMALIEVƏ

### SUMMARY

This article studies influence of metal microstructure on mechanism of geometric breakdown of diodes with a Schottky barrier.

It is shown that in electronic processes, occurring in the contact between a metal and a semiconductor, the metal plays a very active role and is a more important contact partner than a semiconductor. The results are explained according to the theory of complex systems.

**Keywords:** metal-semiconductor contact, Schottky diode, barrier height, microstructure, interfaces, heterogeneity, complex systems.

PACS: 11.25. Tq.11.25.Wx. 13.75.Lb.

**ADS/KXD MODELİNDƏ VEKTOR MEZONLARIN  
QRAVİTASIYA FORM FAKTORLARI**

<sup>1,2,3</sup>Ş.Ə.MƏMMƏDOV, <sup>3</sup>M.N.ALLAHVERDİYEVA

<sup>1</sup>Fizika Problemləri İnstitutu,

<sup>2</sup>Bakı Dövlət Universiteti, Nəzəri Fizika kafedrası,

<sup>3</sup>AMEA, Fizika İnstitutu

sh.mamedov62@gmail.com, minaallahverdiyeva@yahoo.com

*AdS/KSN uyğunluğundan istifadə edərək vektor mezonların qravitasiya form faktorları hesablanmışdır. Eyni zamanda gərginlik tenzoru və ya enerji-impuls tenzoru form faktorları kimi adlandırılan qravitasiya form faktorlarını vektor mezona bağlayan ümumi qaydalar verilmişdir.*

**Açar sözlər:** AdS/ KSN uyğunluğu, sərt-divar modeli, nuklon.

**Giriş**

Anti-de Sitter fəzası (AdS) / Kvant xromo-dinamikası (KXD)-nin sərt divar modelindən istifadə edərək vektor mezonların qravitasiya form faktorlarını hesablamaq ümumiləşmiş parton paylanmalarının tətbiqi üçün əhəmiyyətlidir.

AdS/KSN uyğunluğu 4-ölçülü güclü qarşılıqlı təsir nəzəriyyələrindəki qeyri-perturbativ kəmiyyətləri, 5-ölçülü nəzəriyyədəki qravitasiya perturbativ kəmiyyətlər ilə birləşdirməyi təklif edir [1]. Bu birləşdirmənin bir neçə tətbiqləri var; [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13].

Qravitasiya form faktorlarına olan marağın bir hissəsi ümumiləşdirilmiş parton paylanmaları (ÜPP-ları) ilə olan əlaqəsinə görədir. ÜPP-ları hadron strukturunun vacib bir kəmiyyətləridir. ÜPP-larının momentləri qravitasiya form faktorları ilə əlaqəlidir. Xüsusilə, qravitasiya form faktorlarından biri partonlar tərəfindən daşınılan impuls momentini ölçür.

AdS/KSN uyğunluğu [1], güclü qarşılıqlı təsir ilə birləşdirilmiş böyük  $N_c$ , 4-ölçülü konformal sahə nəzəriyyəsi ilə 5-ölçülü AdS fəzasında zəif qarşılıqlı təsiri qravitasiya nəzəriyyəsinə əlaqələndirir. AdS/KSN uyğunluğu həm simlər nəzəriyyəsindən başlayaraq “yuxarıdan aşağıya” yanaşma [2,4], həm də 5-ölçülü qravitasiya dual nəzəriyyəsini qurmaq üçün KXD-nin xüsusiyyətlərini istifadə edən “aşağıdan yuxarıya” yanaşma ilə [5,6,7,8,9] öyrənilmişdir.

AdS/KXD-nin sərt divar modelində 5-ölçülü AdS fəzasının həyəcanlaş-

mayan metrikası aşağıdakı kimidir:

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2), \quad \varepsilon < z < z_0. \quad (1)$$

Burada  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .  $\varepsilon \rightarrow 0$ -da  $z = \varepsilon$  divarı KXD-nin ultrabənövşəyi (UB) sərhəddinə uyğun gəlir və  $z = z_0 \equiv 1/\Lambda_{QCD}$ -də yerləşən divar, infraqırmızı (İQ) bölgəsində KXD-nin konform simmetriyasının pozulması üçün miqyası müəyyənləşdirər. [Kiçik Yunan indeksləri 0-dan 3-ə, kiçik Latın indeksləri isə 0,1,2,3,5-dən yuxarı olacaq] AdS/KSN daxilində 4-ölçülü sahə nəzəriyyəsidəki hər  $\mathcal{O}(x)$  operatoru, 5-ölçülü AdS fəzası daxilindəki mənbə sahəsinə  $\varphi(x, z)$  uyğun gəlir. [5, 6]-da təqdim olunan modelə görə, uyğunluqdan ikisi aşağıdakı şəkildə olur

$$J_L^{a\mu}(x) \leftrightarrow A_L^{a\mu}(x, z), \quad J_R^{a\mu}(x) \leftrightarrow A_R^{a\mu}(x, z). \quad (2)$$

Burada  $J_L^{a\mu} = \bar{q}_L \gamma^\mu t^a q_L$  və  $J_R^{a\mu} = \bar{q}_R \gamma^\mu t^a q_R$  kiral rayihə cərəyanlarıdır.

Ümumi nisbiliyin Laqranj formalizmində gərginlik tenzoru  $T_{\mu\nu}$  üçün mənbə  $g_{\mu\nu}$  metrikasıdır və variasiya  $h_{\mu\nu}$  həddinə görədir. Randall-Sundrum kabrləşməsində  $h_{\mu\nu}$ -dən istifadə edəcəyik, burada  $h_{\mu\nu}$  eninə və izsizdir (Eİ) və eyni zamanda  $h_{\mu z} = h_{z z} = 0$  ödəyir. Eİ kalibrəşməsindəki metrik tenzorun variasiyaları bizə sadəcə kalibrəşmə tenzorunun eninə-izsiz hissəsini verəcəkdir.

### Gravitasiya sektoru

5-ölçülü AdS fəzasında təsir aşağıdakı şəkildədir:

$$S_{5D} = \int d^5x \sqrt{g} \left\{ R + 12 + \text{Tr} \left[ |DX|^2 + 3|X|^2 - \frac{1}{4g_5^2} (F_L^2 + F_R^2) \right] \right\}. \quad (3)$$

Burada  $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m - i[A_m, A_n]$ ,  $A_{L,R} = A_{L,R}^a t^a$ ,  $\text{Tr}(t^a t^b) = \delta^{ab}/2$  və  $D^m X = \partial^m X - iA_L^m X + iXA_R^m$ . Bu məsələ üçün yalnız lazım olan sahələri göstərdik və Dirixle sərhəd şərtlərini  $z_0$  sərhəddinə qoyuruq.

Təsin gravitasiya hissəsi belə olur:

$$S_G = \int d^5x \sqrt{g} (R + 12). \quad (4)$$

Burada AdS fəzasının metrikası həyəcanlanmış metrikadır:

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left( (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu - dz^2 \right), \quad 0 < z < z_0. \quad (5)$$

$h_{zz} = 0, h_{z\mu} = 0$  kalibrəşmə seçimlərindən istifadə edilmişdir. Xəttiləşdirilmiş Eynşteyn tənliklərinin  $\mu\nu, \mu z$  və  $zz$  komponentləri aşağıdakı şəkildədir:

$$\begin{aligned} 0 &= -h_{\mu\nu,zz} + \frac{3}{z} h_{\mu\nu,z} + h_{\mu\nu,\rho}{}^\rho - 2h^\rho{}_{(\mu,\nu)\rho} + \eta_{\mu\nu} \left( \tilde{h}_{,zz} - \frac{3}{z} \tilde{h}_{,z} - \right. \\ &\quad \left. \tilde{h}_{,\rho}{}^\rho + h_{\rho\sigma,}{}^{\rho\sigma} \right) + \tilde{h}_{,\mu\nu} \\ 0 &= \tilde{h}_{,\mu\nu} - h_{\mu\nu,z}{}^z \\ 0 &= \frac{3}{z} \tilde{h}_{,z} + \tilde{h}_{,\rho}{}^\rho - h_{\rho\sigma,}{}^{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (6)$$

$h_{\mu\nu}$ -nün izi  $\tilde{h}$  ilə göstərilir. Eninə-izsiz kalibrəşmədə,  $h_{\mu\nu,}{}^{\nu} = 0$  və  $h_{\mu}{}^{\mu} = 0$ -dır. Hərəkət tənliyi aşağıdakı şəkildə düşür:

$$-z^3 \partial_z \left( \frac{1}{z^3} \partial_z h_{\mu\nu} \right) + \partial^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} = 0. \quad (7)$$

Həllin 4-ölçülü Furrye çevrilməsi  $h_{\mu\nu}(q, z) = h(q, z)h_{\mu\nu}^0(q)$  kimi yazılır.  $h(q, \epsilon) = 1$  olmasını tələb edirik, beləliklə  $h_{\mu\nu}^0(q)$  gravitonun UB sərhəd qiymətinin Furrye çevrilməsidir. İQ sərhəd şərti  $\partial_z h(q, z_0) = 0$  olur. Bu sərhəd şərti ilə təsiri dəyişdirərkən əldə edilən İQ sərhəd şərtindən səth həddi yox olur. (7) tənliyindən alırıq:

$$h(q, z) = \frac{\pi}{4} q^2 z^2 \left( \frac{Y_1(qz_0)}{J_1(qz_0)} J_2(qz) - Y_2(qz) \right). \quad (8)$$

İki indeksli  $T^{\mu\nu}$  tenzorunun simmetrikliliyindən 10 asılı olmayan komponent olduğu nəticəsinə gəlirik. Enerji-impuls saxlanması  $q_\mu T^{\mu\nu} = 0$  bunu altı asılı olmayan komponentə endirir.  $T^{\mu\nu}$  beş sərbəst komponentli eninə izsiz  $\hat{T}^{\mu\nu}$  hissəsinə parçalaya bilər. Bu isə öz növbəsində, eninə-izsiz hissəni  $\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{3}(\eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / q^2)T$  ilə verilən asılı olmayan komponentlə buraxır, burada  $T^{\mu\nu}$  aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$T^{\mu\nu} = \hat{T}^{\mu\nu} + \frac{1}{3}(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2})T. \quad (9)$$

Bu saxlanan operator eninə mənbə operatoruna vurulur. Eninə və izsiz  $h_{\mu\nu}^0$  variyasiyası təkcə  $\hat{T}^{\mu\nu}$  ilə qarşılıqlı təsirdə ola bilər.

### Vektor sektoru

Təsirin ifadəsindəki  $V = (A_L + A_R)/2$  vektor sahəsi və  $A = (A_L - A_R)/2$  aksial vektor sahəsi bu şəkildə təyin olunur. Biz bu işdə vektor zərrəciyə baxdığımızdan təkcə vektor hissəni nəzərə almalıyıq. Bu zaman təsirin ifadəsi:

$$S_V = \int d^5x \sqrt{g} Tr \left\{ -\frac{1}{2g_5^2} F_V^2 \right\}. \quad (10)$$

olur. Burada  $(F_V)_{mn} = \partial_m V_n - \partial_n V_m$  təsirdə ikinci tərtibə qədərdir. Bu hissədə istifadə olunan metrika dinamik deyildir, yəni sadəcə tənlik (5)-in həyəcanlaşmamış hissəsidir.

$V_z = 0$  kalibrəşməsində vektor sahənin eninə hissəsi aşağıdakı hərəkət tənliyini ödəyir:

$$\left( \partial_z \left( \frac{1}{z} \partial_z V_\mu^a(q, z) \right) + \frac{q^2}{z} V_\mu^a \right)_\perp = 0. \quad (11)$$

Bu hərəkət tənliyinin həllini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$V_{\perp\mu}(q, z) = V(q, z) V_\mu^0(q), \quad (12)$$

burada  $V_\mu^0(q)$  4-ölçülü vektor cərəyan operatoru  $J_V^a = \bar{q} \gamma_\mu t^a q$ -nin mənbəsinin Furrye çevrilməsidir. Cərəyanın saxlanması,  $q_\mu J_V^\mu = 0$ , mənbənin eninə olmasını təmin edir. Buna görə təkcə 5-ölçülü vektor sahənin eninə hissəsi UB sərhəddindəki  $J_V^\mu$ -nin mənbəsi kimi hesab olunur.

$V(q, z)$  vektor sahə üçün daxildən sərhəddə propoqatoru adlanır və onun üçün sərhəd şərtləri  $V(q, \epsilon) = 1$  və  $\partial_z V(q, z_0) = 0$ -dir. Bu zaman daxildən sərhəddə propoqatoru aşağıdakı şəkildə olur:

$$V(q, z) = \frac{\pi}{2} z q \left( \frac{Y_0(qz_0)}{J_0(qz_0)} J_1(qz) - Y_1(qz) \right). \quad (13)$$

Vektor sahə üçün UB sərhəddə təsirin ifadəsində bu həlli nəzərə alsaq yalnız səth həlləri qalmış olur:

$$S_V = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} V^{0\mu}(q) V_\mu^0(q) \left( -\frac{\partial_z v(q, z)}{2g_5^2 z} \right)_{z=\epsilon}. \quad (14)$$

$\rho$  mezonun Kaluza-Klein (KK) toplusu (12) tənliyinin  $q^2 = m_n^2$  ilə normallaşmış həllərindən alınə bilər.  $n$ -ci KK modası  $\rho$  mezonun dalğa funksiyası olan  $\psi_n(x, z)$  üçün sərhəd şərtləri  $\psi_n(z = 0) = 0$  və  $\partial_z \psi_n(z_0) = 0$  şəklindədir. Bu moda üçün həllər belədir:

$$\psi_n = \frac{\sqrt{z}}{z_0 J_1(m_n z_0)} z J_1(m_n z), \quad (15)$$

və  $\int (dz/z) \psi_n^2(z) = 1$  normallaşdırma şərtini ödəyir.

(10)-ci tənliyin həlli üçün Qrin funksiyası metodundan istifadə edərək, daxildən sərhəddə propoqatorunun  $\rho$  mezonun KK modalarının sonsuz toplusu üzərində yekun olaraq yazıla biləcəyini göstərmək olar

$$V(q, z) = -g_5 \sum_n \frac{F_n \psi_n(z)}{q^2 - m_n^2}. \quad (16)$$

Burada,  $F_n = (1/g_5) \left( -\frac{1}{z'} \partial_{z'} \psi_n(z') \right) \Big|_{z'=\epsilon}$ -dir. Bessel funksiyalarının Kneser-Sommerfeld ayrılışı daxil edilərək oxşar nəticələr əldə edilə bilər.  $F_n$  sabiti vektor mezonun parçalanma sabitidir və aşağıdakı şəkildə müəyyən edilir:

$$\langle 0 | J_\mu^a(0) | \rho_n^b(p) \rangle = F_n \delta^{ab} \epsilon_\mu(p). \quad (17)$$

Bunu vektor cərəyanlarının 2 nöqtəli funksiyasını hesablamaqla görmək olar. (14) tənliyindəki 5-ölçülü təsiri  $V^0$ -a görə funksional törəmələr alaraq və  $V^0$ -ın eninə olmasından istifadə edərək  $V^{0\mu} V_{\mu-1}^0 V^{0\mu} \Pi_{\mu\nu} V^{0\nu}$  ilə əvəz edirik:

$$i \int d^4 x e^{iqx} \langle 0 | \mathcal{T} J_\mu^a(x) J_\nu^b(0) | 0 \rangle = \Sigma(q^2) \Pi_{\mu\nu} \delta^{ab}, \quad (18)$$

Burada,  $\Pi_{\mu\nu} = (\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2)$  eninə proyektordur və  $\Sigma(q^2)$  aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$\Sigma(q^2) = - \frac{\partial_z V(q, z)}{g_5^2 z} \Big|_{z=\epsilon} = \frac{1}{g_5^2 z} \sum_n \frac{(\psi'_n(\epsilon)/\epsilon)^2}{q^2 - m_n^2 + i\epsilon}. \quad (19)$$

(17) bərabərliyindən istifadə edərək tənlik (18)-un sağ tərəfini aşağıdakı kimi yazə bilərik:

$$i \int d^4 x e^{iqx} \langle 0 | \mathcal{T} J_\mu^a(x) J_\nu^b(0) | 0 \rangle = \sum_n \frac{F_n^2 \delta^{ab}}{q^2 - m_n^2 + i\epsilon} \Pi_{\mu\nu}, \quad (20)$$

Bu tənlik (16)-dəki  $F_n$ -nin  $\rho$  mezonun parçalanma sabiti olaraq şərh edilməsini təstiqləyir.

### Vektor mezonların qravitasiya form faktorları

Spini 1 olan zərrəciklərin gərginlik tenzorunun matris elementləri

$\langle \rho_n^a(p_1) | T^{\mu\nu}(q) | \rho_n^b(p_2) \rangle$  ilə təyin edilir və 3 nöqtəli funksiyaadan çıxarıla bilər:

$$\langle 0 | T(J_a^\alpha(x) T^{\mu\nu}(y) J_b^\beta(\omega)) | 0 \rangle. \quad (21)$$

Yuxarıdakı 3 nöqtəli funksiyanın Furye çevrilməsi  $J^{\alpha\alpha}(-p_2) T^{\mu\nu}(q) J^{\beta\beta}(-p_1)$  olaraq ifadə edilə bilər. Görilmə tenzorunun matris elementlərini taparkən tamlıq şərtindən iki dəfə istifadə edirik:

$$\sum_n \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p^0} |\rho_n^a(p)\rangle \langle \rho_n^a(p)| = 1 \quad (22)$$

və sonra

$$\varepsilon_\alpha^*(p_2, \lambda_2) \varepsilon_\beta(p_1, \lambda_1) (p_1^2 - m_n^2) (p_2^2 - m_n^2) \frac{1}{F_n^2}, \quad (23)$$

ifadəsinə vururuq və  $p_1^2 \rightarrow m_n^2$  və  $p_2^2 \rightarrow m_n^2$  limiti götürürük.

Tam təsirin aşağıdakı hissəsini düşünək, (3) bərabərliyi

$$S_V = -\frac{1}{4g_5^2} \int d^5 x \sqrt{g} g^{lm} g^{pn} F_{mn}^a F_{lp}^a \quad (24)$$

olur. Bu ifadədə təkə  $hVV$  həddləri 3 nöqtəli funksiyalara əlavə verir,

$$\langle 0 | T J^\alpha(x) \hat{T}^{\mu\nu} J^\beta(\omega) | 0 \rangle = \frac{-2\delta^3 S}{\delta V_\alpha^0(x) \delta h_{\mu\nu}^0(y) \delta V_\beta^0(\omega)}, \quad (25)$$

harada ki, funksional törəmə  $h^0 = V^0 = 0$  qiymətində hesablanır.

3 nöqtəli funksiyaə əlavə verən təsirdəki münasib həddlər bu şəkildə yazılır:

$$S_V \cong \frac{1}{2g_5^2} \int \frac{d^5 x}{z} (\eta^{\rho\gamma} \eta^{\sigma\delta} h_{\gamma\delta} [-F_{\sigma z} F_{\rho z} + \eta^{\alpha\beta} F_{\sigma\alpha} F_{\rho\beta}]), \quad (26)$$

(25) bərabərliyindəki enerji-impuls tenzoru eninə və izsiz olmalıdır. Buna görə eninə-izsiz proyektor tətbiq edilə bilər, bu zaman

$$\eta^{\rho\gamma} \eta^{\sigma\delta} h_{\gamma\delta} \rightarrow h_{\gamma\delta} \left[ \left( \eta^{\rho\gamma} - \frac{q^\rho q^\gamma}{q^2} \right) \left( \eta^{\sigma\delta} - \frac{q^\sigma q^\delta}{q^2} \right) - \frac{1}{3} \left( \eta^{\rho\sigma} - \frac{q^\rho q^\sigma}{q^2} \right) \left( \eta^{\gamma\delta} - \frac{q^\gamma q^\delta}{q^2} \right) \right] \quad (27)$$

olur.

Funksional törəmələri aldıqdan sonra 3 nöqtəli funksiyaadan qravitasiya form faktorunun ifadəsini aldıqda bərabərlik aşağıdakı şəkildə düşür:

$$\langle \rho_n^a(p_2, \lambda_2) | \hat{T}^{\mu\nu}(q) | \rho_n^b(p_1, \lambda_1) \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + p_1 - p_2) \delta^{ab} \varepsilon_{2\alpha}^* \varepsilon_{1\beta} \times \\ \left[ -A(q^2) (4q^{[\alpha} \eta^{\beta](\mu} p^{\nu)}) + 2\eta^{\alpha\beta} p^\mu p^\nu - \frac{1}{2} \hat{C}(q^2) \eta^{\alpha\beta} (q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) + \right. \\ \left. D(q^2) (q^2 \eta^{\alpha(\mu} \eta^{\nu)\beta} - 2q^{(\mu} \eta^{\nu)\alpha} q^\beta) + \eta^{\mu\nu} q^\alpha q^\beta - \hat{F}(q^2) \frac{q^\alpha q^\beta}{m_n^2} (q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \right]. \quad (28)$$

Burada,  $p = (p_1 + p_2)/2$ ,  $q = p_1 - p_2$ ,  $a^{[\alpha} b^{\beta]} = (a^\alpha b^\beta - a^\beta b^\alpha)/2$  və  $a^{(\alpha} b^{\beta)} = (a^\alpha b^\beta + a^\beta b^\alpha)/2$ .

İnvariant funksiyalar ilə qravitasiya form faktorları fəzaya bənzər impuls ötürülməsi üçün bu şəkildə olur:

$$A(q^2) = Z_2, \\ \hat{C}(q^2) = \frac{1}{q^2} \left( \frac{4}{3} Z_1 + \left( q^2 - \frac{8m_n^2}{3} \right) Z_2 \right), \\ D(q^2) = \frac{2}{q^2} Z_1 + \left( 1 - \frac{2m_n^2}{q^2} \right) Z_2, \\ \hat{F}(q^2) = \frac{4m_n^2}{3q^4} (Z_1 - m_n^2 Z_2), \quad (29)$$

ilə  $Z_1$  və  $Z_2$  bu oblastda aşağıdakı şəkildə yazılır:

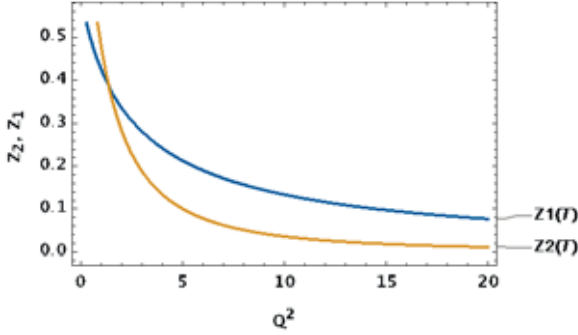


$$\begin{aligned}
Z_1 &= \int \frac{dz}{z} \mathcal{H}(Q, z) \partial_z \psi_n \partial_z \psi_n, \\
Z_2 &= \int \frac{dz}{z} \mathcal{H}(Q, z) \psi_n \psi_n.
\end{aligned}
\tag{30}$$

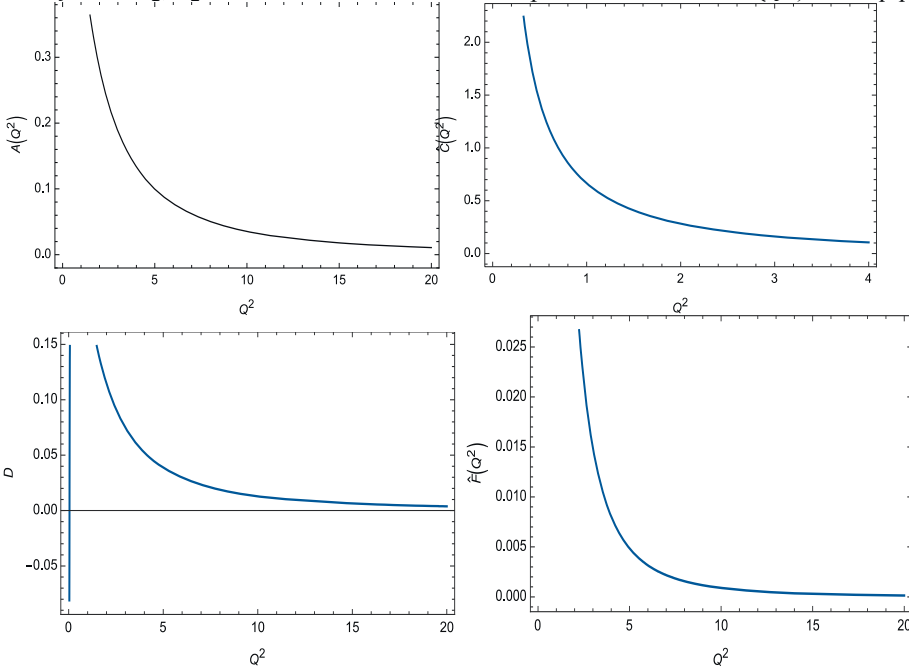
Fəzaya bənzər impuls ötürülməsi üçün  $q^2 = -Q^2 < 0$  (8) həllinə uyğun aşağıdakı kimi yazılır:

$$\mathcal{H}(Q, z) = \frac{1}{2} Q^2 z^2 \left( \frac{K_1(Qz_0)}{I_1(Qz_0)} I_2(Qz) + K_2(Qz) \right).$$

$z_0 = 1/\Lambda_{QCD}$  parametri  $m_\rho = 0.77 \text{ GeV}$   $\rho$  mezonun kütləsinin təcrübi qiyməti ilə müəyyənləşdirilir.  $z_0$  parametri uyğun olaraq  $3.1 \text{ GeV}$  qiymətini alır.



**Sə. 1.**  $Z_1, Z_2$  form faktorlarının ötürülən impulsun kvadratından ( $Q^2$ ) asılılıq qrafiki.



**Sə. 2.**  $A(q^2), \hat{C}(q^2), D(q^2), \hat{F}(q^2)$  invariant funksiyalarının ötürülən impulsun kvadratından ( $Q^2$ ) asılılıq qrafiki.

## ƏDƏBİYYAT

1. Maldacena J.M., Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. 38, 1113 (1999)].
2. Sakai T. and Sugimoto S. Prog. Theor. Phys. 113, 843 (2005).
3. Hirn J. and Sanz V. JHEP 0512, 030 (2005).
4. Karch A. and Katz E. JHEP 0206, 043 (2002).
5. Erlich J., Katz E., Son D.T. and Stephanov M.A. Phys. Rev. Lett. 95, 261602 (2005).
6. Da Rold L. and Pomarol A. Nucl. Phys. B 721, 79 (2005).
7. Teramond G.F. de and Brodsky S. J. Phys. Rev. Lett. 94, 201601 (2005).
8. Brodsky S.J. and Teramond G.F. de Phys. Rev. Lett. 96, 201601 (2006).
9. A.Karch, E.Katz, D.T. Son and Stephanov M.A. Phys. Rev. D 74, 015005 (2006).
10. Arkani-Hamed N., Porrati M. and Randall L. JHEP 0108, 017 (2001).
11. Ji X.D. Phys. Rev. Lett. 78, 610 (1997).
12. A number of reviews are available, including K.Goeke, M.V.Polyakov and M.Vanderhaghen, Prog. Part. Nucl. Phys. 47, 401 (2001); M.Diehl, Phys. Rept. 388, 41 (2003); A.V.Belitsky and A.V.Radyushkin, Phys. Rept. 418, 1 (2005); and S. Boffi and B. Pasquini.
13. Kwee H.J. and Lebed R.F.
14. Brodsky S.J. and Teramond G.F. de.

## ГРАВИТАЦИОННЫЕ ФОРМ ФАКТОРЫ ВЕКТОРНЫХ МЕЗОНОВ В МОДЕЛИ АдС/КХД

Ш.А.МАМЕДОВ, М.Н.АЛЛАХВЕРДИЕВА

### РЕЗЮМЕ

Мы вычислили гравитационные форм факторы векторных мезонов, используя соответствие АдС/КТП. Мы дали правила сумм, связывающие гравитационные форм факторы с обобщёнными распределениями партонов векторных мезонов, которые также можно назвать форм факторами тензора напряженностей или тензора энергии-импульса.

**Ключевые слова:** АдС/КТП соответствие, модель твердой стены, нуклон.

## GRAVITATIONAL FORM FACTORS OF VECTOR MESONS IN AN AdS/QCD MODEL

Sh.A.MAMEDOV, M.N.ALLAHVERDIYEVA

### SUMMARY

We calculated the gravitational form factors of vector mesons using AdS / CFT correspondence. We have given sum rules linking gravitational form factors to vector meson GPDs, which can also be called stress tensor or energy-momentum tensor form factors.

**Keywords:** AdS/CFT correspondence, hard-wall model, nucleon.

УДК. 621.38

## НЕЛИНЕЙНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В InSe ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

**Р.М.МАМЕДОВ***Бакинский государственный университет*  
*rovshan63@rambler.ru*

*Исследованы нелинейные оптические свойства кристаллов InSe при высоких уровнях оптического возбуждения. В качестве источника излучения были использованы Nd:YAG лазер (2-я гармоника,  $\lambda=532$  нм). Показано, что в кристаллах InSe, вся выделяемая энергия, превращается в теплоту, и имеет место тепловой механизм нелинейности. В отличие от массивных кристаллов в сверхтонких, оптически однородных слоях InSe, может наблюдаться оптический механизм нелинейности, просветление края полосы поглощения, с одновременным его сдвигом в высокоэнергетическую область спектра.*

**Ключевые слова:** InSe, лазер, нелинейное поглощение, просветление края полосы поглощения.

### **Введение**

В проблеме взаимодействия лазерного излучения с твердым телом, особый интерес представляет вопрос изучения явлений, протекающих в полупроводниковых кристаллах, возбуждаемых сверхвысокими световыми потоками. Это обусловлено, с одной стороны, огромными возможностями использования полупроводников для целей нелинейной оптики, а с другой стороны – возможностью реализации в самих полупроводниках совершенно новых явлений, имеющих большое принципиальное значение, которые ранее были практически недоступны для экспериментальных исследований.

В полупроводниках, обладающих большой величиной поляризуемости, весьма сильно выражены нелинейные оптические свойства. В зависимости от соотношения между энергией кванта ( $\hbar\omega$ ) и интенсивностью ( $I$ ) лазерного излучения с одной стороны и шириной запрещенной зоны ( $E_g$ ), энергетической структуры и степенью чистоты используемых полупроводниковых материалов с другой стороны, могут наблюдаться различные механизмы нелинейного поглощения, такие как межзонные переходы, резонансное возбуждение экситонов, примесные состояния, которые приводят к таким нелинейным оптическим явлениям, как многофотонное поглощение, заполнение зон, оптическая бистабильность, иони-

зация экситонов, перенормировка зон и т.д. [1-3].

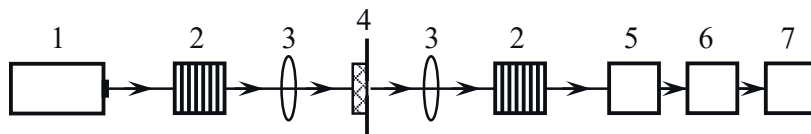
Благодаря большой нелинейной восприимчивости и уникальным физическим свойствам, моноселенид индия (InSe) представляет большой научный и практический интерес для квантовой электроники и нелинейной оптики [4-7]. В двумерных образцах InSe подвижность электронов является наивысшей ( $\sim 7000 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ ). Этот параметр материала является чрезвычайно важным с точки зрения повышения быстродействия приборов, которые могут быть созданы на основе моноселенида индия. Край полосы поглощения InSe обусловлен свободными экситонами, с относительно большой энергией связи ( $\sim 25 \text{ мэВ}$ ), что позволяет вести оптические исследования при комнатной температуре [8-11].

Данная работа посвящена исследованию нелинейного поглощения в монокристаллах и тонких пленках InSe под действием лазерного излучения.

### Методика эксперимента

Кристаллы моноселенида индия выращивались методом Бриджмена. Так как эти кристаллы имеют слоистую структуру, то удалось получить очень тонкие монокристаллические пластинки путем механического отщепления их от толстых образцов. При этом сразу получались образцы с зеркально оптической поверхностью, не требующие специальной полировки. Толщина исследуемых образцов составляла от долей микрона до 2 – 4 микрон.

В качестве источника излучения использовался импульсный Nd:YAG лазер со встроенными генераторами 2-ой и 3-ей гармоники, предназначенные для генерации излучения с длиной волны 1064, 532 и 335 нм. Длительность лазерного импульса составляла 12 нс с максимальной мощностью  $\sim 12 \text{ МВт}/\text{см}^2$ . Интенсивность изменялась при помощи калиброванных нелинейных световых фильтров. Спектры поглощения образцов исследовались с помощью автоматизированного монохроматора с двойной дисперсией M833, с детектором излучения регистрирующим излучение в диапазоне длин волн 350 – 2000 нм. Схема экспериментальной установки показана на рисунке 1.



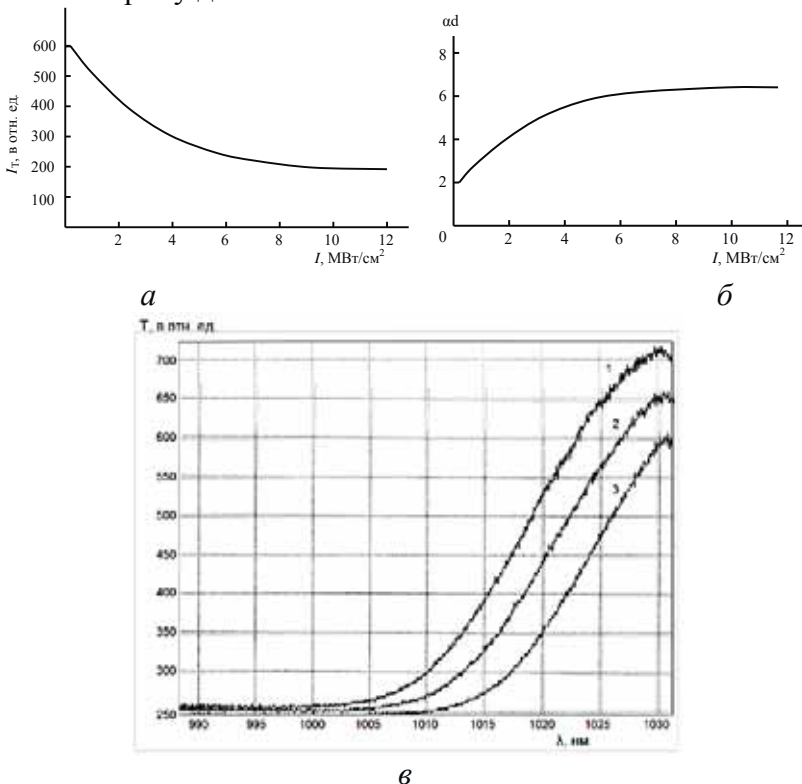
**Рис.1.** Экспериментальная установка для измерения коэффициента нелинейного поглощения в InSe. 1 – лазер; 2, 6 – фильтры; 3, 5 – линзы; 4 – щель с образцом; 7 – монохроматор; 8 – детектор; 9 – компьютер.

Эксперименты проводились таким образом, что увеличение интенсивности падающего света на поверхность исследуемых образцов, никоим образом не влияет на общую величину сигнала регистрирующего уст-

ройства. Любое изменение интенсивности сигнала (уменьшение или увеличение), свидетельствует о наличии нелинейного поглощения в InSe при высоких интенсивностях лазерного возбуждения.

### Экспериментальные результаты и их обсуждение

На рисунке 2,а представлена зависимость величины коэффициента пропускания монокристаллов InSe от интенсивности излучения, при возбуждении кристаллов светом с энергией кванта  $\hbar\omega = 2,34$  эВ (2-ая гармоника Nd:YAG лазера). Как видно из рисунка, наблюдается нелинейное поглощение в области межзонного поглощения и происходит уменьшение пропускания при высоких уровнях возбуждения. При интенсивности падающего света  $\sim 6$  МВт/см<sup>2</sup> и выше, на кривой пропускания наблюдается насыщение. На рисунке 2,б представлена зависимость оптической плотности монокристаллов InSe от интенсивности лазерного излучения. Из рисунка видно, что с ростом интенсивности возбуждения оптическая плотность возрастает  $\sim$  в 3 раза. На рисунке 2,в представлены спектры пропускания монокристаллов InSe при различных интенсивностях возбуждения. Как видно из рисунка с увеличением интенсивности возбуждения происходит уменьшение величины пропускания и спектры пропускания смещаются в сторону длинных волн.



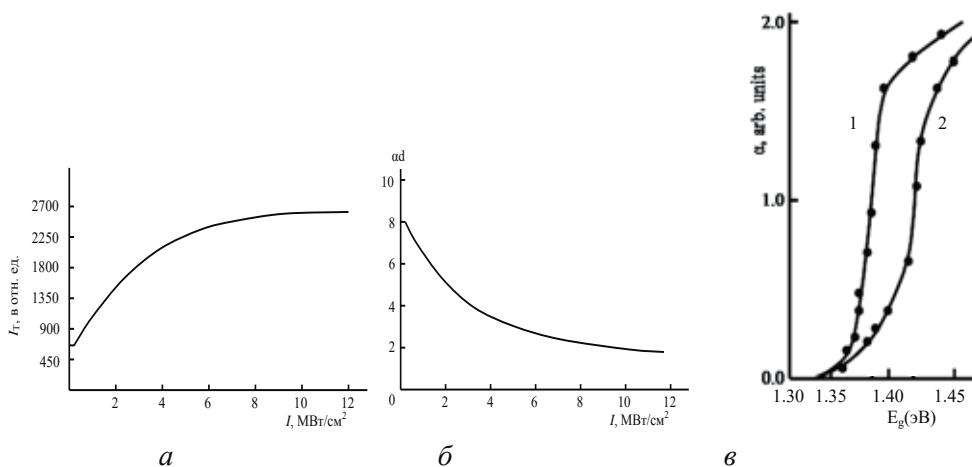
**Рис.2.** Зависимость коэффициента пропускания (а), оптической плотности (б) и спектров пропускания массивных монокристаллов InSe, от интенсивности излучения.

Аналогичные исследования были проведены в тонких пленках InSe. Следует отметить, что полученные результаты значительно отличаются от тех, которые были получены для массивных кристаллов.

На рисунке 3,а представлена зависимость коэффициента пропускания от интенсивности лазерного света. Видно, что в тонких пленках InSe, также наблюдается нелинейное поглощение. коэффициент пропускания не только не уменьшается с увеличением интенсивности, а наоборот, наблюдается более резкий рост при высоких уровнях возбуждения. Таким образом, в тонких пленках InSe при высоких уровнях возбуждения, наблюдается просветление образца. Зависимость оптической плотности от интенсивности возбуждения показывает, что при высоких уровнях возбуждения происходит уменьшение оптической плотности (рис. 3,б).

На рисунке 3,в приведены спектры поглощения тонких пленок InSe при низких (кривая 1) и высоких (кривая 2) уровнях оптического возбуждения. Как видно из рисунка, при высоких уровнях возбуждения одновременно происходит уменьшение поглощения около запрещенной зоны и сдвиг края полосы поглощения в сторону высоких энергий.

По нашему мнению полученные экспериментальные результаты, свидетельствуют о наличии нелинейного поглощения в кристаллах и тонких пленках InSe при высоких уровнях оптического поглощения. Но механизмы нелинейного поглощения, несмотря на тот факт, что оба исследования проводились на одном и том же материале InSe, могут сильно отличаться. По-видимому, наблюдаемые особенности в зависимости коэффициента пропускания от интенсивности возбуждения и спектров поглощения при различных уровнях возбуждения, наиболее последовательно объяснены наличием механизма тепловой нелинейности в монокристаллах InSe.



**Рис.3.** Зависимость коэффициента пропускания (а), оптической плотности (б) и спектров поглощения тонких пленок InSe, от интенсивности излучения.

Действительно, основным вопросом, возникающим при рассмотрении процесса рекомбинации зонных электрона и дырки генерированных лазерным излучением – это вопрос о том, в каком виде выделяется освобождающаяся при рекомбинации энергия. Если при этом акт рекомбинации сопровождается появлением светового кванта, т.е. энергия освобождающаяся при рекомбинации выделяется в виде люминесцентного свечения, то интерпретация механизма рекомбинации не вызывает затруднений. Однако для чистых полупроводников с обычными значениями ширины запрещенной зоны  $\sim 1 - 2$  эВ, интенсивность излучательной рекомбинации оказывалась ничтожной. Существует другой механизм рекомбинации, безызлучательный, который предусматривает превращение выделяющейся в каждом акте рекомбинации энергии в тепло. На опыте безызлучательная рекомбинация наблюдается в подавляющем большинстве случаев. Зависимость энергии запрещенной зоны от температуры может быть представлена в виде:

$$E_g(T) = 1350 \text{ meV} - \frac{0.58T^2}{T + 226K} \frac{\text{meV}}{\text{K}}. \quad (1)$$

Приведенные нами расчеты, основанные на формуле (1), показывают, что нагрев монокристаллов InSe лазерным излучением на  $50 \div 60$  К, может привести к наблюдаемому сдвигу края поглощения в длинноволновую область спектра на 10 нм, что совпадает с экспериментальными результатами.

По нашему мнению, наблюдаемое около запрещенной зоны нелинейное поглощение в тонких пленках InSe, может быть обусловлено эффектом заполнения при высоких интенсивностях возбуждения. Действительно, электроны и дырки, генерированные лазерным светом, в результате быстрой релаксации, блокируют дальнейшее поглощение на краю полосы поглощения. Это приводит к просветлению края полосы поглощения и его сдвигу в сторону высоких энергий.

### **Заключение**

Следует отметить, что в массивных кристаллах и тонких пленках InSe, под действием лазерного излучения, наблюдается нелинейное поглощение. В кристаллах InSe, где безызлучательная рекомбинация основных носителей, генерированных лазерным светом доминирует над излучательной рекомбинацией, вся выделяемая в каждом акте рекомбинации энергия, превращается в теплоту, может иметь место тепловой механизм нелинейности.

В отличие от массивных кристаллов в сверхтонких, оптически однородных слоях InSe, может наблюдаться оптический механизм нелинейности. Просветление края полосы поглощения InSe, с одновременным его сдвигом в высокоэнергетическую область спектра, которое связано с заполнением энергетических зон при высоких уровнях оптического возбуж-

дения, позволяет на основе тонких пленок InSe создать полупроводниковый лазер.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Панков. Оптические процессы в полупроводниках. М.: Мир, 1973, 443с.
2. Т.Мосс, Г. Баррел, Б. Эллис. Полупроводниковая оптоэлектроника. М.: Мир, 1976, 428 с.
3. S.S. Yao, J. Bchert and R.R. Alfano. Phys. Rev. B 25 (1982) 6534.
4. Kuzym-zade A.H., Salmanov V.M., Karabulur M., Dincher A., Huseynov A.H., Dzhafarov M.A. Structure, optical and luminescent properties of GaSe and InSe nanoparticles International Journal of Current Research. USA, 2015, v.7, №7, p. 18321-18327.
5. Кязым-заде А.Г., Салманов В.М., Гусейнов А.Г., Мамедов Р.М., Салманова А.А., Ахмедова Ф.Ш. Особенности оптического поглощения и фотопроводимости моноселенида индия при лазерном возбуждении. Известия ВУЗов, Томск, 2017, Т. 60, № 10, стр.30-33.
6. Кязым-заде А.Г., Салманов В.М., Гусейнов А.Г., Мамедов Р.М., Агамалиев З.А., Салманова А.А., Ахмедова Ф.М. Инверсия типа проводимости тонких пленок n-InSe под действием лазерного излучения. Журнал технической физики, 2019, том 89, вып.4, с.599-602.
7. Ковалюк З.Д. Моноселенид индия – революция в наноэлектронике. [www. 2geek.ru/news/336](http://www.2geek.ru/news/336).
8. Nilanthy Balakrishnan, Zakhar R. Kudrynskiy, Emily F. Smith, Michael W. Fay, Oleg Makarovsky, Zakhar D. Kovalyuk, Laurence Eaves, Peter H Beton and Amalia Patanè. IOP Publishing Ltd 2D Materials, 2017, v. 4, 2, 025043, p. 1-10.
9. Denis A. Bandurin, Anastasia V. Tyurnina, Geliang L. Yu, Artem Mishchenko, Viktor Zolyomi, Sergey V. Morozov, Roshan Krishna Kumar, Roman V. Gorbachev, Zakhar R. Kudrynskiy, Sergio Pezzini, Zakhar D. Kovalyuk, Uli Zeitler, Konstantin S. Novoselov, Amalia Patanè, Laurence Eaves, Irina V. Grigorieva, Vladimir I. Fal'ko, Andre K. Geim & Yang Cao. Nature Nanotechnology, (2016) doi: 10.1038/nnano.2016.242.
10. Bobrysheva A.I., Golubev G.P., Dobinda I.I., Zhukov E.A., Luchinskii D.G. and Shekun Yu.G.. Phys. Status Solidi (a) 117 (1990) 587.
11. Abdullaev G.B., Godzhaev I.O., Kakhramanov N.B. and Suleimanov R.A. Fiz. Tverd. Tela 34 (1992) 75.

#### LAZER ŞÜALANMASININ TƏSİRİ İLƏ InSe-DƏ QEYRİ-XƏTTİ UDMA

R.M.MƏMMƏDOV

#### XÜLASƏ

Yüksək optik həyəcanlaşmada InSe kristallarının qeyri-xətti optik xassələri təcrübi olaraq öyrənilmişdir. Şüa mənbəyi olaraq Nd:YAG lazerinin ikinci harmonikasından ( $\lambda=532$  nm) lazerdən istifadə edilmişdir. Göstərilmişdir ki, InSe kristallarında bütün ayrılan enerji istiliyə çevrilir və qeyri-xəttliliyin istilik mexanizmi mövcuddur. İrihəcmli kristallardan fərqli olaraq, ultranazik, optik bircins InSe laylarında qeyri-xəttliliyin istilik mexanizmi, eyni zamanda yüksək enerji tərəfə sürüşməsi ilə spektrin udma kənarının şəffaflığı müşahidə edilə bilər.

**Açar sözlər:** InSe, lazer, qeyri-xətti optik udma, udma kənarının şəffaflığı.



# NONLINEAR ABSORPTION IN InSe UNDER THE ACTION OF LASER RADIATION

R.M.MAMEDOV

## SUMMARY

The nonlinear optical properties of InSe crystals are investigated at high levels of optical excitation. Nd: YAG laser (2nd harmonic,  $\lambda = 532$  nm) was used as a radiation source. It is shown that in InSe crystals, all the released energy is converted into heat, and a thermal non-linearity mechanism takes place. In contrast to bulk crystals in ultrathin, optically homogeneous InSe layers, an optical mechanism of nonlinearity, bleaching of the absorption band edge, with its simultaneous shift to the high-energy region of the spectrum, can be observed.

**Keywords:** InSe, laser, nonlinear absorption, bleaching of the absorption band edge.

UOT 533.951.537.52

**ФРОНТ ИОНИЗАЦИИ РАСПРОСТРАНЯЮЩИЙСЯ ВДОЛЬ ТРУБКИ С ПЕРЕМЕННОЙ РАСПРЕДЕЛЁННОЙ ЁМКОСТЬЮ**

**Г.М.САДЫХ – ЗАДЕ, М.Н.АГАЕВ, Н.Х.ДЖАФАРОВА**  
*Бакинский Государственный Университет*  
*gulara.sadiqzade@gmail.com, agayevm50@mail.ru*

*В настоящей работе впервые исследуются параметры волны ионизации вдоль длинной разрядной трубки с немонотонно распределенной емкостью. Показано, что изменение распределенной емкости по длине трубки не оказывает существенного влияния на скорость фронта ионизации. Установлено, что при всех исследованных разрядных условиях существенно меняя распределение заряда  $q_0$  по длине, не оказывает существенного влияния на сам процесс и сохраняет определяющими для его динамики разрядные условия, имеющие место при формировании волны у п.э.*

**Ключевые слова:** пробой газа, волна ионизации, скорость фронта ионизации.

В последние годы значительное внимание уделяется экспериментальным исследованиям волн ионизации в газах, которые могут возникать при электрическом пробое в разрядном промежутке и обычно наблюдаются как движущийся фронт свечения. Волны ионизации представляют собой – области повышенной ионизации частиц газа, отделенные узкой переходной областью (фронтом волны) от областей с более низкой степенью ионизации. В пределах фронта волны происходит резкий скачок степени ионизации частиц газа. Структуру в газе волны ионизации определяют процессы ионизации, рекомбинации и переноса энергии. Ионизационные волны могут быть уединенными, периодическими, стационарными, бегущими и т.д. Скорость распространения таких волн зависит от ряда экспериментальных условий. Из физической картины волн пробоя следует, что емкость  $C_0$  должна влиять на основные параметры, характеризующие процесс (скорость фронта, величину тока на стенки трубки и другие). При изучении волн ионизации обычно распределенная емкость  $C_0$  (отнесенная к единице длины) считается постоянной по длине.

До настоящего времени были проделаны исследования волны ионизации за ее фронтом в случае с постоянной [1,2,4] монотонно уменьшающейся или увеличивающейся [2,3] по длине разрядной трубки распределенной емкостью.

В настоящей работе впервые исследуются параметры волны иони-

зации вдоль длинной разрядной трубки с немонотонно распределенной емкостью.

Изучался пробой в стеклянной газоразрядной трубке с межэлектродным расстоянием 0,96 м и внутренним диаметром 0,32 м, заполненной аргоном при давлениях 0,8 Тор.

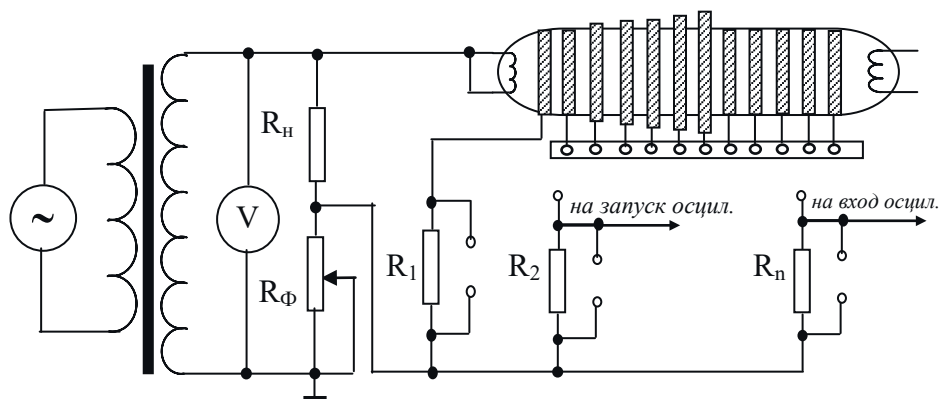


Рис 1. Электрическая схема измерений.

Схема экспериментальной установки представлена на рис.1. Питающее напряжение от звукового генератора повышалось с помощью трансформатора до значений  $U_{эф} = 2$  кВ и подавалось между землей и электродом (ближайшим к максимальному значению  $C_0$ ), называемым поджигающим (П,Э.). Второй электрод оставался свободным. Частота подаваемого напряжения не превышала 150 Гц. Тогда процесс пробоя становился многократным, повторяющимся с частотой подаваемого напряжения.

Емкость  $C_0$  создавалась одинаковыми кольцами из алюминиевой фольги шириной  $3 \cdot 10^{-2}$  м, расстояние между ними  $10^{-2}$  м. Первые три кольца с одной из сторон были надеты на трубку, между остальными и трубкой располагались диэлектрические прокладки толщиной от  $2 \cdot 10^{-4}$  м до  $1,08 \cdot 10^{-2}$  м. В результате распределенная емкость с помощью 12 колец, начиная с третьего, линейно уменьшалась от одного конца до 12 кольца (через каждые  $(2 - 3) \cdot 10^{-2}$  пФ/м)  $\sim 20$  раз. Емкость на одном из участков трубки будет меняться неравномерно – или резко увеличиваться от минимального значения  $C_0$  до максимума, или наоборот, от максимума  $C_0$  падать до минимума. В то же время стартовые значения ёмкостей остаются одинаковыми. Для того, чтобы образовать такую систему, рядом с обкладкой, имеющей минимальную ёмкость  $C_0$ , с сохранением размеров и расстояний между кольцами, было непосредственно на трубку, без диэлектрических прокладок надето ещё пять колец, имеющих максимальную ёмкость. Теперь уже стартовые обкладки с обеих сторон имеют максималь-

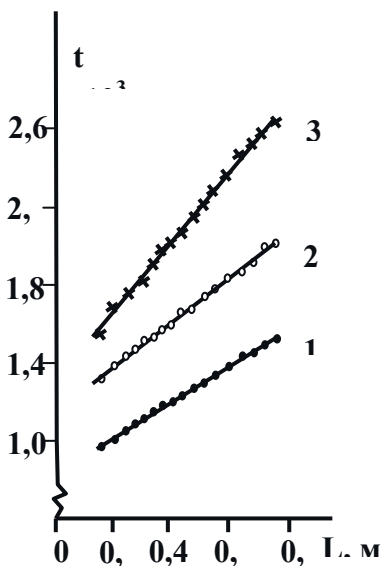
ную ёмкость, в дальнейшем ёмкость или равномерно уменьшается до минимума, а затем скачком возрастает до максимума, или, при движении волны с противоположного электрода, ёмкость от максимальной падает до минимальной, а затем равномерно увеличивается.

Величина ёмкости определялась экспериментально на измерителе ёмкости, точность измерений  $\pm 2,5\%$ . Для этих измерений отрезок трубки, идентичный исследуемой, заполнялся электролитом, внешней обкладкой служила алюминиевая фольга. Результаты измерений соответствуют расчётам по формуле для ёмкости коаксиального конденсатора

$$C_0 = \frac{III\varepsilon}{2 \ln r_2/r_1} \frac{\text{пФ}}{\text{м}}, \text{ где } r_2 \text{ и } r_1$$

наружный и внутренний радиусы трубки,  $\varepsilon$  диэлектрическая проницаемость стекла.

Они соединялись с общей заземленной шиной через зарядное сопротивление  $R = 5$  кОм, смонтированное на штекерных гнездах таким образом, что подключении любого из них ко входу осциллографа остальные кольца оставались замкнутыми накоротко. Общая шина заземлялась через регулируемое сопротивление 1 кОм. Оно служило для фазировки импульсов тока, протекающих в цепи обкладок, с питающим напряжением, т.к. эти импульсы могли модулироваться малой долей (5÷10 В) напряжения питания. Обкладки

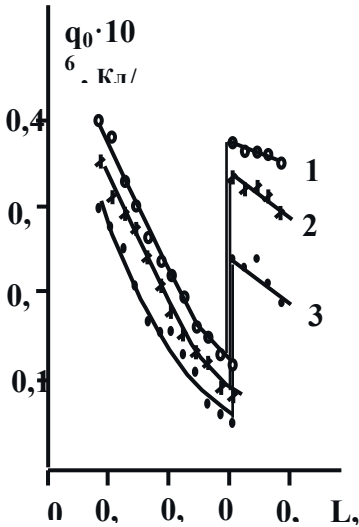


**Рис.2.** Зависимость времени перемещения фронта ионизации от расстояния до п.э. Аргон,  $p = 0,8$  Торр,  $U = 1000$  В, 1.  $f = 150$  Гц, 2.  $f = 100$  Гц, 3.  $f = 80$  Гц

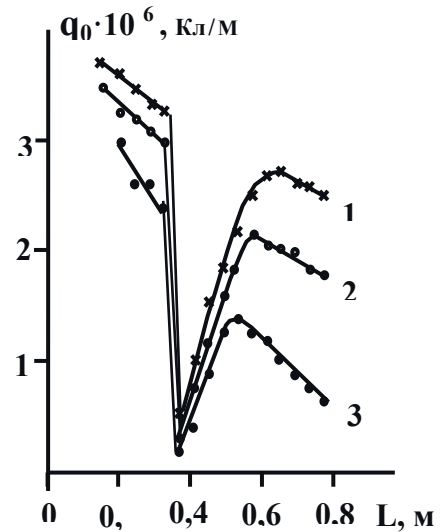
последовательно подключались ко входу осциллографа.

Полученные при таком немонотонном изменении распределённой ёмкости вдоль трубки графики времени прохождения фронта ионизации, в зависимости от расстояния до п.э., представлены на рис.2. Из рисунка видно, что зависимости  $f = f(L)$  имеют линейный вид и, следовательно, скорость фронта  $v$  остаётся постоянной по длине трубки, независимо от того, в какую сторону движется волна, т.е. как и каким образом меняется ёмкость  $C_0$ . Кроме того, значения  $v$  не меняются и при изменении направления распространения фронта ионизации, как это наблюдалось в экспериментах с равномерно распределённой по длине ёмкостью при ра-

венстве начальных значений  $C_0$ . Следовательно, изменение характера распределения ёмкости  $C_0$  по трубке не оказывает влияния на скорость фронта и её величину при одинаковых стартовых условиях. Это является подтверждением сделанного ранее вывода о незначительной роли того, каким образом меняется распределенная ёмкость по длине, и меняется ли она вообще, и определяющей роли значений  $C_0$  у п.э.



**Рис.3.** Зависимость величины заряда  $q_0$ , приходящего в импульсе на 1 см длины трубки, от расстояния до п.э., в сторону уменьшающегося значения ёмкости  $C_0$ . Аргон,  $f = 150$  Гц,  $p = 0,8$  Тор, 1 -  $U = 1000$  В, 2 -  $U = 700$  В, 3 -  $U = 600$  В.



**Рис.4.** Зависимость величины заряда  $q_0$ , приходящего в импульсе на 1 см длины трубки, от расстояния до п.э., Аргон,  $p = 0,8$  Тор,  $f = 150$  Гц,  $C_0$  увеличивается, 1 -  $U = 1000$  В, 2 -  $U = 800$  В, 3 -  $U = 600$  В.

Изменение распределения по трубке заряда  $q_0$ , приходящего в импульсе на единицу длины, в такой системе со специфически меняющейся по длине ёмкостью  $C_0$ , показано на графиках рисунков 3, движущейся в сторону уменьшающейся в линейной части ёмкости, и рисунков 4 при движении в противоположную сторону.

Характер зависимостей представленных на рис. 3 – 4, в области линейно меняющейся ёмкости, существенно зависит от того, какой из электродов является поджигающим – с уменьшением  $C_0$  заряд  $q_0$  монотонно убывает. А при движении в сторону увеличения распределённой ёмкости, зависимость перестаёт быть монотонной, причем максимум зависимости смещается в глубь трубки с ростом частоты и величины подаваемого напряжения. В области скачка, или резкого изменения ёмкости, заряд  $q_0$  ведёт себя соответственно изменению  $C_0$ , т.е. или резко возрастает при переходе от минимальной ёмкости к максимальной, или, наоборот резко падает на минимуме  $C_0$ .

Отсюда следует, что разнообразное изменение распределённой ёмкости по трубке, существенно меняя распределение заряда  $q_0$  по длине, не оказывает существенного влияния на сам процесс и сохраняет определяющими для его динамики разрядные условия, имеющие место при формировании волны у п.э.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Недоспасов А.В., Новик А.Е. Скорость распространения фронта ионизации при пробое длинных разрядных трубок // ЖТФ, 1960, т.30, № 11, с. 1329.
2. Недоспасов А.В., Садыкзаде Г.М., Эфендиев К.И. Влияние магнитного поля на пробой в длинной разрядной трубке // ТВТ, 1983, т.21, №6, с.1062-1065.
3. Агаев М.Н, Садык-заде Г.М, Эфендиев К.И. Развитие разряда в длинной трубке с переменной распределённой ёмкостью. ТВТ, т.30, № 4, с.818 – 822, 1992.
4. Недоспасов А.В. О некоторых явлениях при зажигании электрических разрядов в длинных трубках // Т.В.Т., 2013, т.51, №4, с.483 – 487.

#### TUTUMU DƏYİŞƏN PAYLANMIŞ BORU BOYUNCA İONLAŞMA CƏBHƏSİNİN YAYILMASI

G.M.SADIXZADƏ, M.N.AĞAYEV, N.H.CƏFƏROVA

#### XÜLASƏ

Bu işdə ilk dəfə qeyri-monoton paylanmış tutuma malik uzun boşalma borusu boyunca ionlaşma dalğasının parametrlərinə tutumun təsiri araşdırılmışdır. Borunun uzunluğu boyunca paylanmış tutumun dəyişməsinin ionlaşma cəbhəsinin sürətinə ciddi təsir göstərmədiyini göstərilir. Məlum olub ki,  $q_0$  yükünün uzunluq boyunca paylanması əhəmiyyətli dərəcədə dəyişdirən bütün tədqiq edilmiş boşalma şərtləri, prosesin özünə əhəmiyyətli təsir göstərmir və AE yaxınlıqdakı dalğanın əmələ gəlməsi zamanı baş verən boşalma dinamikası üçün həlledici olan şərtlər saxlınılır.

**Açar sözlər:** qazın deşilməsi, ionlaşma dalğası, ionlaşma dalğasının sürəti.

#### FRONT OF IONIZATION OF A VARIABLE DISTRIBUTED CAPACITY SPREADING INTO A TUBE

G.M.SADIKH - ZADE, M.N.AGAEV, N.H.JAFAROVA

#### SUMMARY

In this work, we first study the parameters of an ionization wave along a long discharge tube with a nonmonotonically distributed capacitance. It is shown that a change in the distributed capacitance along the length of the tube has no significant effect on the velocity of the ionization front. It was found that, for all the studied discharge conditions, significantly changing the distribution of the charge  $q_0$  along the length, does not have a significant effect on the process itself and retains the discharge conditions that take place during the formation of a wave near the PE as decisive for its dynamics.

**Keywords:** gas breakdown, ionization wave, ionization front velocity.

УДК 537.226.2

**ПРОВОДИМОСТЬ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ  
В СМЕСЯХ ПОРОШКОВ ДИЭЛЕКТРИКА ЦЕОЛИТА  
И ПРОВОДНИКА ГРАФИТА**

**<sup>1</sup>Г.М.ЭЙВАЗОВА, В.И.ОРБУХ, Н.Н.ЛЕБЕДЕВА, Ч.Г.АХУНДОВ**  
*<sup>1</sup>Бакинский Государственный Университет, Нано Центр*  
*Бакинский Государственный Университет, НИИ Физических Проблем*  
*ch.axundov@mail.ru*

*Мы рассмотрели результаты экспериментальных исследований объемной удельной проводимости и диэлектрической проницаемости на разных частотах. в смеси диэлектрика (цеолита) и проводника (графита) в зависимости от объемного содержания графита. Обнаружен переход диэлектрик-проводник (увеличение проводимости в 400 раз при изменении концентрации графита на 2%). Предложена качественная модель, объясняющая полученные зависимости на основе теории перколяции с привлечением понятие фракталов.*

**Ключевые слова:** Цеолит, графит, сопротивление смеси, различных концентрация графита.

**Введение**

Электропроводность композитов, образованных сложной сетью проводящих и изолирующих фаз, определяется механизмами перколяции (течением) в непрерывной сети проводящих частиц и / или туннелированием между проводящими частицами в изолирующей фазе. Переход диэлектрик - проводник в неупорядоченных гетерогенных системах - одна из разновидностей перколяционных процессов, привлекающих внимание исследователей. Например, в двухкомпонентных статических смесях [1,2] и сегнетоэлектрической керамике [3] с сильно различающейся диэлектрической проницаемостью (ДП) и удельной проводимостью компонентов увеличение перколяционного порога статической проницаемости за счет Максвелла-Вагнера релаксация неоднократно наблюдалась и изучалась. Не менее интересен эффект гигантского увеличения эффективной проводимости композита, который незаслуженно плохо отражен в публикациях [4]. В настоящее время не изучен не только физический механизм, но даже возможность получения гигантских проводимостей в неупорядоченных гетерогенных системах. В [4] статистическая смесь сегнетокерамики ПКР-8 ( $\epsilon = 1200$ , с проводимостью  $10^{-10} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{ м}^{-1}$ ) и полиэтилена ( $\epsilon$

= 2,5, с проводимостью  $10^{-6} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{ м}^{-1}$ ) и впервые наблюдался эффект гигантского увеличения эффективной проводимости статистической смеси на пороге перколяции. Авторы данной работы предполагают, что вблизи порога перколяции возникает бесконечный керамический кластер с очень тонкими прослойками проводящего компонента с малым ДП. В этих слоях возникают очень сильные электрические поля, и их высокая проводимость приводит к увеличению эффективной проводимости статистической смеси. В работе [8] на основе теоретических исследований диэлектрических свойств неоднородных сред [5-7] был разработан метод эффективной среды. Этот метод широко использовался при описании физических свойств неоднородных сред, но не позволял предсказать поведение системы при переходе металл-диэлектрик вблизи порога перколяции [9-13].

Подробная информация о переходе металл-диэлектрик была получена в [14], где на основе фрактальной модели гетерогенной среды с хаотической структурой определены частотные зависимости диэлектрических свойств композита металл-диэлектрик, характерные для фрактальных структур. В последнее время использование идей фрактальной геометрии [15] позволило выявить новые закономерности в физике неупорядоченных сред [14]. Оказалось, что вблизи порога перколяции проводящие каналы в смесях металла с диэлектриком имеют структуру стохастического фрактала [15, 17-19]. То есть геометрически токоведущий каркас представляет собой рыхлый объект, имеющий свою фрактальную размерность, а физические процессы на нем описываются степенными функциями [15]. Эффективная проводимость смеси металла с диэлектриком на пороге перколяции является аналогичной функцией. Обозначим проводимость металла  $g_1$ , а диэлектрика -  $g_2$ . При концентрации, соответствующей порогу перколяции  $p_c$ , смешанный режим проводимости реализуется [19]: эффективная проводимость  $g_e$  зависит только от отношения  $h = g_2 / g_1$ . В двумерном случае ( $p_c = 0,5$ ) зависимость эффективной проводимости от  $h$  определяется выражением  $g_e = g_1 h^{1/2}$ , впервые полученным в [20], где также показано, что электрическое поле может испытывать огромные пространственные флуктуации в режиме смешанной проводимости. В наших предыдущих исследованиях [21,22] при изучении электрических свойств смеси цеолита с проводящими металлами (Cu, Si) мы не наблюдали перехода диэлектрик-металл. В этой статье мы выбрали графит в качестве проводящего компонента в смеси цеолит-проводник, поскольку графит, будучи довольно мягким материалом, обладает высокой проводимостью. В этой статье мы изучили проводимость и диэлектрическую проницаемость как функцию концентрации на различных частотах.



## Эксперимент

В качестве модели для исследования проводимости макроразупорядоченных систем были выбраны следующие системы: непроводящий диэлектрик (цеолит) и проводник (графит). В качестве проводников использовались частицы графита. Для этого мы выбрали термографит. Препарат коллоидного графита сухой С-1 с основным размером частиц  $4 \cdot 10^{-6}$  мкм. Использование графита в качестве проводящего компонента имеет значительные преимущества перед другими металлами с точки зрения минимизации контактного сопротивления между частицами графита и кристаллитами цеолита: 1-из-за чешуйчатой структуры графит плотно покрывает поверхность кристаллита цеолита; 2- графит имеет удельное сопротивление, близкое к металлическому; 3- поскольку оксиды углерода являются газами, независимо от наличия графита нельзя рассматривать образование оксидной пленки на частицах графита. Диэлектрическая матрица представляет собой природный цеолит. На основании рентгеноструктурного и спектрально-химического анализов установлена принадлежность природного цеолита к высококремнистым цеолитам типа клиноптилолита [21]. Кристаллическая структура состоит из чередующихся отрицательно заряженных тетраэдров  $AlO_4$  и  $SiO_4$ , которые соединены между собой узлами с порами-наноканалами [23]. Эти каналы представляют собой поле с катионами вне каркаса, то есть  $Na^+$ ,  $K^+$ ,  $Mg^+$ ,  $Ca^+$ , которые компенсируют отрицательные заряды каркаса.

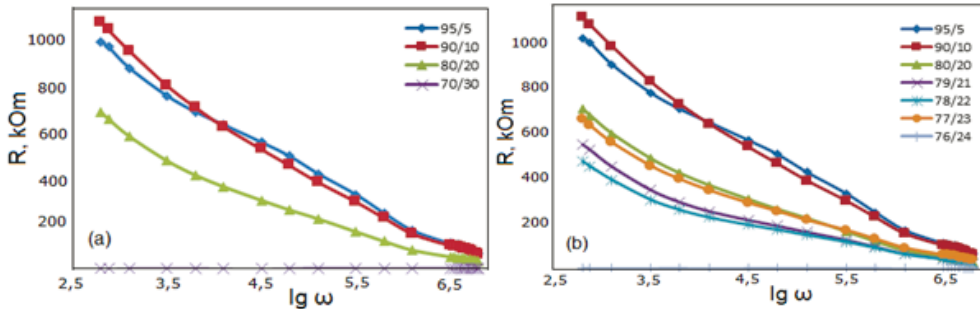
Картирование и характеристический элементный анализ были изучены с помощью сканирующей электронной спектроскопии (SEM) с использованием JEOLJSM7600F. Клиноптилолит обрабатывали на шаровой мельнице FRITSCHE, и полученный порошок состоял из кристаллитов размером 0,5-30 мкм. Образцом для исследования служил конденсатор, заполненный смесью графита определенной концентрации и цеолита. Концентрация графита в смеси варьировалась от 5% до 50%.

Удельное сопротивление при постоянном напряжении определяли стандартным методом, а емкость измеряли спектроскопией импеданса. Для этого на входе в устройство E7-20 был установлен конденсатор со смесью. Измерения проводились при комнатной температуре, атмосферном давлении и влажности 0,85%.

## Результаты и обсуждение

В данной работе мы исследовали проводимость и диэлектрическую проницаемость смеси порошков цеолита и графита в зависимости от процентного содержания графита (от 5% до 50%) для различных значений частоты внешнего электрического поля (от 120 Гц до 1 МГц). Сформулируем экспериментальные результаты: на рис.1(а, б) представлены частотные зависимости сопротивлений для порошков с различным содержанием графита в цеолите. Из совокупности этих графиков вычислялась удельная

проводимость на определенных частотах (100 Гц, 200 Гц, 2000 Гц, 10000 Гц) в образцах, содержащих графит следующих концентраций: 5%, 10%, 20%, 21%, 22%, 23%, 30%, 40% и 50%. Полученные результаты представлены на Рис. 2.

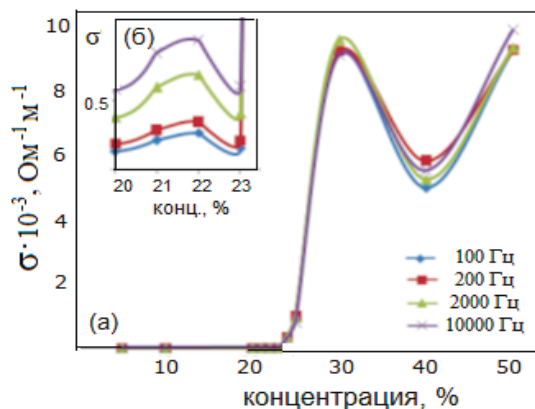


**Рис. 1.** Частотные зависимости сопротивлений для порошков с различным содержанием графита в цеолите: (а) 5%, 10%, 20%, 30% и (б) 5%, 10%, 20%, 21%, 22%, 23%, 24%.

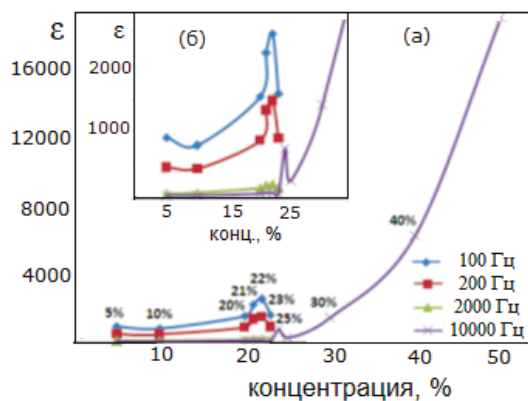
Как видно из рис. 2, при изменении концентрации графита в диапазоне от 23% до 30% электропроводность смеси увеличивается в 10000 раз. При дальнейшем увеличении содержания графита электропроводность снижается, но при концентрации более 40% восстанавливается.

График зависимости диэлектрической проницаемости от концентрации графита (рис. 3) показывает аналогичное поведение при малых (около 23%) концентрациях графита - максимум с последующим минимумом, и не имеет особенностей при высоких концентрациях. В исследуемой смеси концентрация одного компонента в несколько раз отличается от концентрации другого. Поэтому наблюдается аномальный рост проводимости при небольшом изменении концентрации графита (рис. 3.а). Мы интерпретируем это явление как переход диэлектрик-проводник. Такой переход описывается как явление, связанное с перколяцией.

На вставке к рис. 2. показана часть основного графика, соответствующая наиболее быстрому изменению проводимости как функции концентрации (20–30%), в увеличенном в 400 раз увеличении по оси проводимости. Как видно (рис. 2.а), график на вставке топологически эквивалентен основному графику. Такая инвариантность по масштабу позволяет утверждать, что увеличение проводимости, показанное на рис. 2.б, является перколяционным процессом. Для объяснения немонотонной зависимости проводимости от концентрации графита отметим тот факт, что измерения проводились в постоянном электрическом поле. Дело в том, что при изучении диэлектрика-проводника при переходе в постоянное электрическое поле изолированные проводящие области только поляризуются, но не вносят вклад в постоянный ток.



**Рис. 2.** Зависимость электропроводности смеси от концентрации графита: а - от 5% до 50%; (б) - от 20% до 23%



**Рис. 3.** Зависимость диэлектрической проницаемости смеси от концентрации графита: а - от 5% до 50%; (б) - от 5% до 30%.

С увеличением концентрации проводящего компонента (в процессе перехода диэлектрик-проводник) образуются проводящие области, постепенно переходящие во все большие и большие области. Этот процесс заканчивается образованием бесконечного кластера (который может быть зарегистрирован только постоянным электрическим полем). И наоборот, в случае измерения в переменном электрическом поле локальные проводящие области вносят вклад в электрическую проводимость. Следовательно, в переменном поле могут наблюдаться аномалии с увеличением концентрации графита, связанные со слиянием проводящих областей. Чтобы объяснить полученные результаты, мы начнем с перколяционной модели Шкловского-Де Жена [24,25]. В этой модели статическая проводимость смеси проводящих и непроводящих (или слабопроводящих) частиц определяется набором электрически связанных между собой проводящих частиц (каркасом бесконечного кластера). Однако основная масса бесконечного кластера состоит из его тупиковых проводящих ветвей. Ко-

нечно, эти ветви по определению не вносят вклад в статическую проводимость, но они вносят вклад в проводимость, измеренную в переменном поле. Еще более важным является тот факт, что аномально большая емкость системы связана с этими ветвями, когда происходит переход диэлектрик-проводник. В модели Шкловского-Де Жена зависимость проводимости бинарной смеси  $\sigma$  от концентрации проводящего компонента  $x$  имеет вид:

$$\sigma = \sigma_d (x_c - x)^{-1}, x < x_c \quad (1)$$

$$\sigma = \sigma_h \left( \frac{\sigma_d}{\sigma_h} \right)^{0,62}, x = x_c \quad (2)$$

$$\sigma = \sigma_h (x - x_c)^{1,6}, x > x_c \quad (3)$$

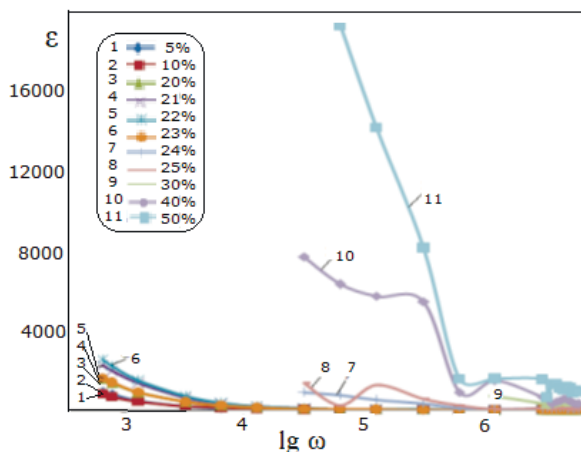
Здесь  $\sigma_h$ - проводимость низкоомного компонента смеси (в нашем случае графита),  $\sigma_d$  - проводимость высокоомного компонента смеси (в нашем случае цеолита),  $x_c$  - критическая концентрация.

Воспользуемся формулами (1) - (3) для объяснения особенностей зависимости электропроводности смеси от концентрации графита (рис. 2). Из этих формул следует, что при приближении концентрации к критическому значению  $x = x_c$  со стороны концентраций, меньших  $x_c$ , проводимость гиперболически стремится к бесконечности, как видно из (1).

При приближении к критической точке со стороны концентрации больше  $x_c$  проводимость стремится к нулю, как видно из (3). Такая неаналитичность проводимости как функции концентрации проводящего компонента означает, что экспериментальные данные следует сравнивать с формулами (1) - (3). Наблюдаемая на рис. 2 особенность полностью описывается формулами (1) - (3). Участок, соответствующий уменьшению проводимости (в зависимости от концентрации), мы рассматриваем как зону неустойчивости, в которую входит критическая точка. Область увеличения проводимости, расположенная слева от этой зоны, хорошо согласуется с формулой (1). То же самое можно сказать и о поведении графика справа от зоны неустойчивости: оно согласуется с формулой (3). Обратите внимание, что формула (3) также предсказывает вогнутость вниз (поскольку вторая производная от (3) положительна), что наблюдается на графике. Такое поведение наблюдается в разных масштабах при концентрациях порядка 20% и 40% соответственно. На наш взгляд, такое поведение связано с образованием проводящих локальных кластеров, комбинация которых завершается образованием бесконечного кластера с увеличением концентрации низкоомной компоненты.

Переходя к обсуждению измерения диэлектрической проницаемости, следует отметить, что проводимость и диэлектрическая проницаемость в однородных системах независимы. Напротив, в неоднородных

системах, таких как наша, измеренные проводимость и диэлектрическая проницаемость зависят друг от друга. Это связано с перераспределением поля между различными частями смеси: оно перемещается из областей с низким сопротивлением в области с высоким сопротивлением. На рис. 2 показана зависимость диэлектрической проницаемости от концентрации проводящего компонента. Видно, что при концентрациях выше 25% и на частотах ниже 10 000 Гц измерения невозможны. Когда измерения еще возможны, значения диэлектрической проницаемости чрезвычайно велики (порядка 16000). Когда происходит переход диэлектрик-проводник, такая аномалия диэлектрической проницаемости имеет свое объяснение [24-25]. Сам этот переход объясняется образованием бесконечного кластера, состоящего из токнесущего каркаса и цепочек электрически связанных между собой проводящих частиц. Они берут начало в проводящем каркасе и заканчиваются тупиками (т. е. разрывом цепи). Именно эти тупиковые цепочки составляют основную часть бесконечного кластера и приводят к аномально большим значениям диэлектрической проницаемости. Поскольку количество тупиковых цепочек, контактирующих друг с другом частиц графита увеличивается с увеличением концентрации графита, диэлектрическая проницаемость также увеличивается (рис. 2, частота 10000 Гц). Из рис. 3 видно, что диэлектрическая проницаемость, начиная с концентрации 25%, резко меняет характер ее частотной зависимости: измерения на низких частотах (ниже 10000Гц) становятся невозможными, диэлектрическая проницаемость резко возрастает. Из графика зависимости проводимости от концентрации на рис. 1 видно, что концентрация 25% - это концентрация перехода диэлектрик-проводник, при которой образуется бесконечный кластер.



**Рис. 4.** Зависимость диэлектрической проницаемости от частоты

Следовательно, кривые на рис. 4, соответствующие концентрациям менее 25%, отражают частотную зависимость диэлектрической прони-

цаемости диэлектрика (цеолита). При концентрациях более 25% графики на рис. 4 отражают частотную зависимость диэлектрической проницаемости, связанную с тупиковыми цепочками проводящих частиц графита. Невозможность измерения диэлектрической проницаемости на частотах ниже 10000 Гц и концентрациях более 25% (т. е. в проводящей фазе) объясняется смещением электрического поля от объема композита к внутреннему сопротивлению источника тока. На высоких частотах этот эффект уменьшается и измерения становятся возможными.

### Заключение

Зона нестабильности наблюдалась в диапазоне концентраций графита от 23% до 30%. В пределах этой зоны проводимость увеличивается в 10000 раз для частоты 100 Гц и в 2000 раз для частоты 1 МГц. Наблюдается идентичный характер зависимости проводимости от концентрации графита на разных масштабах (различающихся в 400 раз). Другими словами, в виде зависимости проводимости от концентрации графита наблюдаются особенности фрактального поведения. Поэтому мы интерпретируем наблюдаемые явления как индуцированный перколяцией переход диэлектрик-проводник. Зависимость диэлектрической проницаемости от концентрации графита для разных частот демонстрирует аномально большие (до 2500) значения, характерные для перехода диэлектрик-проводник. Локальный пик диэлектрической проницаемости наблюдается при той же концентрации (23%), при которых наблюдается переход диэлектрик-проводник. Важно отметить, что композиты на основе цеолита с другими проводящими порошками (медь, кремний) не демонстрируют перехода диэлектрик-проводник при тех же концентрациях. Возможной причиной такого различия может быть низкая плотность графита, которая обеспечивает прямой электрический контакт между частицами графита на расстояниях, превышающих их размер (из-за образования следов графита на цеолите во время перемешивания композита).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Efros A.L., Shklovskii V.I. / Phys.Stat.Solid B, 1976, v.76, N 2, p.475-485.
2. Yemes Y.P. / J. Experimental and Theoretical Physics , 2002, v.121, N 6, p.1339-135.
3. Lemanov V.V. et al. / FTP, 2002, v.44, N 11, p.1948-1957.
4. Turik S.A. et al. / El. J. Issledovano v Rossii, 2026<http://zh.nol/apl/relarn/ru/art/2004/191/pdf>.
5. Maxwell J.C. et al. Oxford, 1873, 365 p. [Reprint: Dover, 1973, N 4, P. 501]
6. Maxwell Garnett J.C., Phil J.C. / Trans. R. Soc. 1904, 203, p.385-420.
7. Bruggeman A.G. / Ann. Phys., 1935, v.24, p.636.
8. Landauer R., 1st Conf. on the Electrical Transport and optical properties of inhomogeneous media, AIP, Columbus, OH, 7-9 september, 1977, AIP conf. Proc., 1978, v.40, p.2-45.
9. Stauffer D. Introduction to the Percolation Theory. London-Philadelphia, 1985.
10. Sahimi M. Applications of Percolation Theory, Taylor and Francis, London. 1994.
11. Privalko V.P., Novikov V.V. / J. Wiley, New York, 1995, p. 235.
12. Webman I., Jortner J. / Phys. Rev. B, 1975, v.11, N8, p.2885.

13. Webman I., Jortner J. Cohen M.H. / Phys. Rev. B, 1976, v.13, N2, p.713.
14. Satanin A.M., Kharkov S.V., Uqolnikov A.Y. / L. Experimental and Theoretical Physics , 1995, v.62, N4, p.301-304.
15. Feder E. Fraktals, M.; Mir; 1991, 254p.
16. Shklovskiy V.I., Efros A.L., Electronic Properties of Doped Semiconductors, M.;Nauka, 1979, 416p.
17. Halvin S., Nossal R. /J. Phys.A. 1984, v.17, L 427.
18. Havlin S., Nossal R., Trus B. and G H Weiss /J. of Physics A: Mathematical and General, 1984, v.17, N18, L 957.
19. Ohtsuki P., Keyes T. / J. Phys. A, 1984, v.17, L 559.
20. Dixne A.N. / J. Experimental and Theoretical Physics, 1970, v.59, p.110-115.
21. Orbukh V.I. , Lebedeva N.N. , Ozturk S. , Salamov B.G. / Superlattices and Microstructures, 2013, v.54, p.16-25.
22. Ozturk Koc S. et al. /Superlattices and Microstructures, 2016, v.91, p. 269-277.
23. Gollardi G, Galli E, Natural Zeolites, Spriger-Verlager, Berlin, 1985, 409 p.
24. Efros A.L. Physics and Geometry of Disorder, «Nauka», Board edition fiz-mat literature 1982, 174p.
25. Scaling Ideas in Polymer Physics [Russian translation] P de Gennes. M., 1982, p.312.

## **DİELEKTRİK SEOLİT VƏ KEÇİRİCİ QRAFİT TOZLARININ QARIŞIĞINDA KEÇİRİCİLİYİN VƏ DİELEKTRİK NÜFUZLUĞUNUN TƏDQIQI**

**Q.M.EYVAZOVA, V.İ.ORBUX, N.N.LEBEDEVA, Ç.Q.AXUNDOV**

### **XÜLASƏ**

Biz müxtəlif tezliklərdə, qarışıqın həcmnin dəyişməsindən asılı olaraq, dielektrik (seolit) və keçirici (qrafitin) toz qarışıqında, keçiriciliyin və dielektrik nüfuzluğunun qiymətlərini tədqiq etmişik. Dielektrik-keçiricilik keçidi müəyyən edimişdir (qrafit konsentrasiyasında 2% dəyişiklik ilə keçiriciliyin 400 dəfə artması). Alınan asılılıqları fraktallar konsepsiyasının iştirakı ilə, perkolyasiya nəzəriyyəsi əsasında izah edən keyfiyyətli bir model təklif olunur.

**Açar sözlər:** Seolit, qrafit, qarışıqın müqaviməti, müxtəlif konsentrasiyalı qrafit.

## **CONDUCTIVITY AND DIELECTRIC CONSTANT IN MIXTURES OF ZEOLITE DIELECTRIC POWDERS AND GRAPHITE CONDUCTOR**

**G.M.EYVAZOVA, V.I.ORBUX, N.N.LEBEDEVA, Ch.G.AKHUNDOV**

### **SUMMARY**

We studied the results of experimental studies of the bulk conductivity and dielectric constant at different frequencies. In a mixture of a dielectric (zeolite) and a conductor (graphite), depending on the volume content of the latter. A dielectric-conductor transition was detected (an increase in conductivity by 400 times when concentration of graphite change by 2%). We have proposed A qualitative model explains the obtained dependences on the basis of the percolation theory with the use of the concept of fractals.

**Keywords:** Zeolit, graphite, mixture resistance, various concentrations of grafite

UOT 543.06, 543.08

**QEYRİ-FERMENTATİV QLÜKOZA SENSORLARI ÜÇÜN  
NANOMƏSAMƏLİ ELEKTRODLARIN FUNKSIONAL  
XARAKTERİSTİKASI****A.H.KƏRİMOVA, S.Q.NURİYEVA, A.M.RƏHİMLİ, H.A.ŞİRİNOVA**  
*Bakı Dövlət Universiteti, Nanoaraşdırma Mərkəzi*  
*aynurakarimova@bsu.edu.az*

*Qeyri-fermentativ sensor sistemlərinin tibbdə tətbiqi ilə bağlı əldə edilmiş uğurlu nəticələr nanoməsaməli elektrodların işlənilib hazırlanması ilə reallaşdırılmışdır. Məlum olmuşdur ki, belə elektrodlarda nanoməsaməli layın qalınlığı və məsamələrin kiçik ölçüsü qeyri-fermentativ sensorların insan plazması və ya qanı durulaşdırılmadan ölçmələr aparmağa imkan verir.*

*Məqalə qeyri-fermentativ qlükoza sensorlarında nanoməsaməli quruluşa malik elektrodlardan istifadə zamanı sistemdə gedən elektrokimyəvi oksidləşmə prosesinin xüsusiyyətlərinin təhlilinə həsr edilmişdir.*

**Açar sözlər:** qlükoza, sensor, nanoquruluşlu elektrodlar, elektrokataliz, elektrokimyəvi oksidləşmə

Qeyri-fermentativ sensorlar fermentativ sensorların malik olduğu çatışmazlıqların aradan qaldırılması baxımından alternativ kimi olduqca böyük maraq dairəsinə malikdirlər [1-5]. Belə hesab edilir ki, məhz qeyri-fermentativ sensorların quruluş və xassələrinin təkmilləşdirilməsi digər növ sensorların malik olduğu stabillik, kütləvi istehsalın mürəkkəbliyi və məhsuldarlığın kiçik qiyməti kimi problemlərin həllinə yardım edəcəkdir. Məhz bu, qeyri-fermentativ biosensorlar sahəsi ilə bağlı tədqiqat işlərinə həsr olunmuş məqalələrin sayının ilbəl artmasına səbəb olur. Nanotexnologiya və nanomateriallar istiqamətində əldə olunan nəticələrin sensorlar sahəsinə tətbiqi isə onun daha da mürəkkəbləşməsi və müxtəlifliyinə gətirib çıxarmışdır [6-8].

Müxtəlif nanoquruluşların—nanohissəcik, nanonaqıl, nanoçubuq, nanoboru, nano və mezoməsaməli hissəcik və təbəqələrin elektrokataliz [9-16], tətbiqi enerji [9, 11-20] və sensorlar [21-25] sahəsində geniş istifadə imkanları barədə ədəbiyyatda çoxsaylı tədqiqat işlərinə rast gəlmək olar. Nanoquruluşa malik materialların katalitik xüsusiyyətləri üç müxtəlif istiqamətdə xarakterizə oluna bilər ki, bura elektrokatalitik aktiv mərkəzlər, səth sahəsinin böyüməsi və keçirici səthlə əhatə olunmuş nano fəzanın formalaşması aiddir.

Məlumdur ki, qlükozanın oksidləşməsində səthi adsorbsiya mərkəzləri və yaxud reaksiyaya girmə qabiliyyətli OHads radikalları iştirak edir və hər iki



hal zəif kinetikaya malik qlükozanın elektrokimyəvi oksidləşmə prosesinin asanlaşmasında rol oynayır [26]. Səthin morfolojiyası ilə yanaşı, məsələn, kvant nöqtələri və plazmon qızıl nanohissəcikləri elektron zona quruluşu və ya səth enerjisinin qiymətinə görə kifayət qədər fərqli xüsusiyyətlər nümayiş etdirirlər [27]. Belə fərqli xüsusiyyətlər elektrod səthində elektrokatalitik aktiv mərkəzlər kimi özünü apararaq qlükozanın elektrokimyəvi oksidləşməsi prosesinin effektiv formada getməsinə səbəb ola bilər.

Digər tərəfdən nanomaterialın səthinin kələ-kötürlüyü elektrokimyəvi reaksiyalarda iştirak edəcək elektrod səthinin sahəsinin böyüməsinə səbəb olur. Bir çox nanoquruluşlu elektrodlar elektrokimyəvi aktiv səth sahəsinə malik olur ki, bu da müvafiq olaraq yüksək cərəyanın generasiyasına səbəb olur. Belə nanoquruluşlu elektrodlar həssaslıq xüsusiyyətlərinə görə üstünlüyə malik olurlar [28, 29]. Lakin həssaslıq xüsusiyyəti fon siqnallarının mütləq şəkildə yaxşı selektivliyə malik olması demək deyildir və bununla yanaşı, elektrod səth sahəsinin böyüməsi tutum cərəyanının qiymətinin də artmasına səbəb olur. Qlükoza sensorları üçün səthin nanoquruluşlu olması o zaman əhəmiyyətli sayılır ki, yaranan aktiv katalitik mərkəzlər və yaxud elektrokimyəvi aktiv səth sahəsi seçici olaraq qlükoza siqnallarını gücləndirə bilsin. Bu səbəbdən, adətən, qlükozanın təyini zamanı və xüsusən də bu prosesə maneə törədən səbəblərin aradan qaldırılması üçün köməkçi funksiya və ya metodlardan istifadə tələb olunur ki, elektrod səthində qlükozanın seçici oksidləşmə prosesi baş versin. Sadə nanoməsaməli elektrod ona aktiv mərkəzlər daxil edilmədən belə qlükozaya qarşı həssaslığını artırmaqla yanaşı onun seçicilik xüsusiyyətinin yaxşılaşmasına da təsir göstərə bilməsi maraqlı hal hesab edilir [30, 31].

Nanoməsamə daxilində qapalı sahə (boşluq) reagentin səthlə qarşılıqlı əlaqəsi və ya onun həllolması prosesinin dəyişməsinə təsir etməklə kataliz üçün əlverişli mühitin yaranmasına səbəb olur. Seolit və ya karbon nanoboruları kimi heterogen nanoməsamələrə malik quruluşlar bir çox üzvi molekullara qarşı göstərdikləri mükəmməl katalitik aktivliyi ilə seçilir [32, 33]. Elektrokatalizə gəldikdə isə nanoməsaməliyə malik elektroda tətbiq edilmiş elektrik sahəsi məsamənin daxilində sahə qradienti yaradır ki, onun miqyası ikiqat elektrik layının xarakterik qalınlığı hesab edilən Debay uzunluğunun qiyməti ilə müqayisə olunacaq səviyyədə olur. Belə sahə qradienti mezoməsaməli mühidə elektrolit qatılığının həssaslıq funksiyasıdır və bunu da oksigen molekulunun reduksiyası prosesində müşahidə etmək mümkündür [34].

Məsamələrin ölçüsü və elektrolitin qatılığı nanoməsaməli elektrodun bütün səthinin Faradey reaksiyasında iştirakını təmin edir. Qeyd etmək lazımdır ki, məhz bu xüsusiyyət elektrokatalitik aktiv səth sahəsinin görünən səthə nisbətinin maksimum qiymətinə əsasən məsamə ölçülərinin müəyyən edilməsini mümkün edir. Qlükozanın oksidləşməsinin baş verməsi üçün məsamələrinin ölçüsü ikiqat elektrik layının qalınlıq qiymətindən kiçik olan səthlərdə doymuş potensialın qiyməti kifayət qədər böyük olmalıdır. Qlükozanın oksidləşmə prosesinin həssaslığı məsamələrin ölçüsü azaldıqca artır və onların

müəyyən qiymətində maksimum olur. Elektrodun elektrokatalitik aktiv səth sahəsinin onun görünən səth sahəsinə nisbəti yalnız məsamələrin ölçüsündən deyil, həmçinin nanoməsaməli elektrodun özünün qalınlığından da asılı olur. Aydın ki, nanoməsaməli elektrodun qalınlıq qiyməti artdıqca onun elektrokatalitik aktiv səth sahəsinin görünən səthə nisbəti də artacaqdır. Belə ki, analiz zamanı maneə törədən askorbin turşusu və 4-asetamidofenol kimi molekullar qlükoza ilə müqayisədə daha sürətlə oksidləşdiyindən onların mühitdə kiçik qatılığı belə cərəyanın yüksək qiymətinin yaranmasına səbəb olacaqdır. Bu səbəbdən bir çox hallarda cərəyanın yüksək qiyməti qlükoza ilə deyil, analizə maneə törədən molekulların yüksək kinetikasi ilə bağlı olur. Qlükozanın oksidləşməsi elektrodun elektrokatalitik aktiv səth sahəsinin onun görünən səthə nisbətinin qiymətinin artması ilə artdığı halda, maneə törədən molekulların səbəb olduğu cərəyan elektrodla doyur. Qanda qlükoza qatılığının istənilən digər elektroaktiv reagentlərə nisbətən çox olması çıxış siqnalında qlükoza aid cərəyan qiymətinin dominantlıq etməsinə səbəb olur ki, bu da onun təyin edilməsini mümkün edir.

Bir qrup tədqiqatçılar [30] qlükozanın oksidləşmə kinetikasını elektrodepozisiya olunmuş mezoməsaməli Pt elektrodu (kələ-kötürlük faktoru (RF)=72) və yaxşı cilalanmış (kələ-kötürlük faktoru (RF)=2,6) çubuq formalı Pt elektrodu ilə müqayisəli şəkildə öyrənmişdirlər. Nanoməsaməli elektrodun xarici səthi ilə qarşılıqlı əlaqədə olan bütün reagentlər oksidləşdiyindən hamar və nanoməsaməli elektrodlardan gələn cərəyan siqnallarının qiymətləri birbirindən fərqlənməmişdir. Tədqiqatçılar tərəfindən sübut edilmişdir ki, yüksək elektrokinetikaya malik maneə törədən molekullarla bağlı yaranan Faradey cərəyanı isə elektrodun elektrokatalitik aktiv səth sahəsi ilə deyil, görünən həndəsi sahəsi ilə mütənasiblik təşkil etmişdir [31, 35]. Qeyd edilməlidir ki, təcrübələr xlor ionları saxlayan fosfat-duz bufer məhlullarında aparılmışdır ki, bunlar da Pt və Au kimi qiymətli metallar əsasında hazırlanmış elektrodlar iştirakında gedən elektrokataliz prosesinə maneə törədən əsas ionlardan sayılırlar. Beləliklə, bu tədqiqatlar, eyni zamanda, nanoməsaməli elektrodların istifadəsi zamanı maneələrin azaldılmasının mümkünliyünü sübut etmişdir.

Bu günə qədər nəşr olunan təcrübə nəticələrinin heç də hamısı katalitik aktiv mərkəzlər və elektrodun elektrokatalitik aktiv səth sahəsinin onun görünən səthinə nisbəti kimi faktorlarla şərtlənməmişdir. Mikroməsaməli elektrodlardakı məsamə ölçülərinə yaxın mezoməsaməli elektrodlarla aparılmış qlükozanın oksidləşməsi üçün cərəyanının qiyməti elektrokatalitik aktiv səth sahəsinə görə müəyyən edilən qiymətindən yüksəkdir. Ola bilər ki, bu, qlükozanın oksidləşməsi kimi kiçik sürətlə gedən elektrokimyəvi reaksiyaları sürətləndirən bir başqa faktorun mövcudluğu ilə bağlı olsun [36-41]. Belə yaxşılaşdırılmış xüsusiyyətlər elektrod səthini əhatə edən nanofəzanın hesabına mümkün olur ki, bu da məsamə ölçüləri böyük olmayan mezoməsaməli elektrodlarla aydın müşahidə edilir. Belə mühitlərdə həlledicinin dielektrik xassələri, güclü elektrik sahəsinin qradiyenti, yüksək dərəcədə məhdud dinamik

diffuziya və s. xüsusiyyətlər vacib rol oynayır.

Qeyd olunanlar nanoquruluşlu elektrodların qlükozanın təyini ilə bağlı bəzi funksional məsələlərin izah edilməsində, qanunauyğunluqların müəyyən edilməsində rol oynasa da onların elektrokatalitik xüsusiyyətləri ilə bağlı çoxlu sayda müxtəlif fundamental tədqiqatların aparılmasına hələ də ehtiyac vardır.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Wang, G.F., He X.P., Wang, L.L., Gu, A.X., Huang, Y., Fang, B., Geng, B.Y., Zhang X.J. 2013. Non-enzymatic electrochemical sensing of glucose. *Microchim. Acta.*,180, 161–186.
2. Tian, H.F., Jia, M.Z., Zhang, M.X., Hu, J.B. 2013. Nonenzymatic glucose sensor based on nickel ionimplanted-modified indium tin oxide electrode. *Electrochim. Acta.*,96,285–290.
3. Si, P., Huang, Y.J., Wang, T.H., Ma, J.M. 2013. Nanomaterials for electrochemical non-enzymatic glucose biosensors. *RSC Adv.*,3, 3487–3502.
4. Babu, K.J., Kumar, T.R., Yoo, D.J., Phang, S.M., Kumar G.G. 2018. Electrodeposited nickel cobalt sulfide flowerlike architectures on disposable cellulose filter paper for enzyme-free glucose sensor applications. *ACS Sustain. Chem. Eng.*,6,16982–16989.
5. Dong, C, Zhong, H, Kou, T, Frenzel, J, Eggeler G, Zhang, Z.2015.Three-Dimensional Cu Foam-Supported Single Crystalline Mesoporous Cu<sub>2</sub>O Nanothorn Arrays for Ultra-Highly Sensitive and Efficient Nonenzymatic Detection of Glucose.*ACS Appl. Mater Interfaces*,7(36), 20215-23.
6. Guo, M.Q., Hong, H.S., Tang, X.N., Fang, H.D., Xu, X.H. 2012. Ultrasonic electrodeposition of platinum nanoflowers and their application in nonenzymatic glucose sensors. *Electrochim. Acta.*,63,1–8.
7. Huang, B.R., Wang, M.J., Kathiravan, D., Kurniawan, A., Zhang, H.H., Yang, W.L. 2018. Interfacial effect of oxygen-doped nanodiamond on CuO and micropyrarnidal silicon heterostructures for efficient nonenzymatic. *ACS Appl. Bio. Mater.*,1, 1579–1586.
8. Gou, X.F., Sun, S.D., Yang, Q., Li, P.J., Liang, S.H., Zhang, X.J., Yang, Z.M. 2018. A very facile strategy for the synthesis of ultrathin CuO nanorods towards non-enzymatic glucose sensing. *New J. Chem.*,42, 6364–6369.
9. Popczun, E. J., McKone, J. R., Read, C. G., Biacchi, A. J., Wiltrout, A. M., Lewis, N. S. and Schaak, R. E. 2013. Nanostructured nickel phosphide as an electrocatalyst for the hydrogen evolution reaction. *J. Am. Chem. Soc.*, 135, 9267-9270.
10. Chen, J. Y., Lim, B., Lee, E. P. & Xia, Y. N. 2009. Shape-controlled synthesis of platinum nanocrystals for catalytic and electrocatalytic applications. *Nano Today*, 4, 81-95.
11. Qu, L. T., Liu, Y., Baek, J. B. & Dai, L. M. 2010. Nitrogen-doped graphene as efficient metal-free electrocatalyst for oxygen reduction in fuel cells. *ACS Nano*, 4, 1321-1326.
12. Xie, J. F., Zhang, H., Li, S., Wang, R. X., Sun, X., Zhou, M., Zhou, J. F., Lou, X. W. and Xie, Y. 2013. Defect-rich MoS<sub>2</sub> ultrathin nanosheets with additional active edge sites for enhanced electrocatalytic hydrogen evolution. *Adv. Mater.*, 25, 5807-5813.
13. Trogadas, P., Ramani, V., Strasser, P., Fuller, T. F. and Coppins, M. O. 2016. Hierarchically structured nanomaterials for electrochemical energy conversion. *Angew. Chem. Int. Ed.*, 55, 122-148.
14. Zhou, M., Wang, H. L. & Guo, S. J. 2016. Towards high-efficiency nanoelectrocatalysts for oxygen reduction through engineering advanced carbon nanomaterials. *Chem. Soc. Rev.*, 45, 1273-1307.
15. Strasser, P. 2016. Free electrons to molecular bonds and back: closing the energetic oxygen reduction (ORR)-Oxygen evolution (OER) cycle using core-shell nanoelectrocatalysts. *Accounts Chem. Res.*, 49, 2658-2668.
16. Dasdelen, Z., Yildiz, Y., Eris, S. and Sen, F. 2017. Enhanced electrocatalytic activity and durability of Pt nanoparticles decorated on GO-PVP hybride material for methanol

- oxidation reaction. *Appl. Catal. B Environ.*, 219, 511-516.
17. Giraldo, J. P., Landry, M. P., Faltermeier, S. M., McNicholas, T. P., Iverson, N. M., Boghossian, A. A., Reuel, N. F., Hilmer, A. J., Sen, F., Brew, J. A. and Strano, M. S. 2014. Plant nanobionics approach to augment photosynthesis and biochemical sensing. *Nat. Mater.*, 13, 400-408.
  18. Abrahamson, J. T., Sempere, B., Walsh, M. P., Forman, J. M., Sen, F., Sen, S., Mahajan, S. G., Paulus, G. L. C., Wang, Q. H., Choi, W. & Strano, M. S. 2013. Excess thermopower and the theory of thermopower waves. *ACS Nano*, 7, 6533-6544.
  19. Li, Y. M. & Somorjai, G. A. 2010. Nanoscale advances in catalysis and energy applications. *Nano Lett.*, 10, 2289-2295.
  20. Hagfeldt, A., Boschloo, G., Sun, L. C., Kloo, L. and Pettersson, H. 2010. Dyesensitized solar cells. *Chem. Rev.*, 110, 6595-6663.
  21. Iverson, N. M., Barone, P. W., Shandell, M., Trudel, L. J., Sen, S., Sen, F., Ivanov, V., Ato- lia, E., Farias, E., McNicholas, T. P., Reuel, N., Parry, N. M. A., Wogan, G. N. and Strano, M. S. 2013. In vivo biosensing via tissue-localizable near-infrared-fluorescent single-walled carbon nanotubes. *Nat. Nanotechnol.*, 8, 873-880.
  22. Koskun, Y., Savk, A., Sen, B. and Sen, F. 2018. Highly sensitive glucose sensor based on monodisperse palladium nickel/activated carbon nanocomposites. *Anal. Chim. Acta*, 1010, 37-43.
  23. Baskaya, G., Yildiz, Y., Savk, A., Okyay, T. O., Eris, S., Sert, H. and Sen, F. 2017. Rapid, sensitive, and reusable detection of glucose by highly monodisperse nickel nanoparticles decorated functionalized multi-walled carbon nanotubes. *Biosens. Bioelectron.*, 91, 728-733.
  24. Yang, C., Denno, M. E., Pyakurel, P. and Venton, B. J. 2015. Recent trends in carbon nanomaterial-based electrochemical sensors for biomolecules: a review. *Anal. Chim. Acta*, 887, 17-37.
  25. Zhu, C. Z., Yang, G. H., Li, H., Du, D. & Lin, Y. H. 2015. Electrochemical sensors and biosensors based on nanomaterials and nanostructures. *Anal. Chem.*, 87, 230-249.
  26. Kathryn E. T., Richard G. C. 2010. Electrochemical Non-enzymatic Glucose Sensors: A Perspective and an Evaluation. *Int. J. Electrochem. Sci.*, 5, 1246 – 1301.
  27. Philippot, K. and Serp, P. 2013. Concepts in nanocatalysis. In: *Nanomaterials in Catalysis* (Ed. by K. Philippot and P. Serp), pp. 1-54. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.
  28. Wang, G., He, X., Wang, L., Gu, A., Huang, Y., Fang, B., Geng, B., Zhang, X. 2012. Non-enzymatic electrochemical sensing of glucose. *MicrochimicaActa*, 180 (3-4), 161-186.
  29. Patolsky, F., Gabriel, T., & Willner, I. 1999. Controlled electrocatalysis by microperoxidase-11 and Au-nanoparticle superstructures on conductive supports. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 479(1), 69-73.
  30. Park, S., Chung, T. D. and Kim, H. C. 2003. Nonenzymatic glucose detection using mesoporous platinum. *Anal. Chem.*, 75, 3046-3049.
  31. Park, S., Song, Y. J., Han, J. H., Boo, H. and Chung, T. D. 2010. Structural and electrochemical features of 3D nanoporous platinum electrodes. *Electrochim. Acta*, 55, 2029-2035.
  32. Christenson, H. K. 2001. Confinement effects on freezing and melting. *J. Phys. Condens. Matter*, 13, R95-R133.
  33. Pan, X. and Bao, X. 2013. Confinement effects in nanosupports. In: *Nanomaterials in Catalysis* (Ed. by K. Philippot and P. Serp), pp. 415-441. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.
  34. Boo, H., Park, S., Ku, B. Y., Kim, Y., Park, J. H., Kim, H. C. and Chung, T. D. 2004. Ionic strength-controlled virtual area of mesoporous platinum electrode. *J. Am. Chem. Soc.*, 126, 4524-4525.
  35. Bard, A. J. and Faulkner, L. R. 2001. *Electrochemical Methods: Fundamentals and Applications*. Second Ed. New York: Wiley.
  36. Bae, J. H., Han, J. H., Han, D. and Chung, T. D. 2013. Effects of adsorption and

- confinement on nanoporous electrochemistry. Faraday Discuss, 164, 361-376.
37. Bae, J. H., Kim, Y. R., Kim, R. S. and Chung, T. D. 2013. Enhanced electrochemical reactions of 1,4-benzoquinone at nanoporous electrodes. Phys. Chem. Chem. Phys., 15, 10645-10653.
38. Han, J. H., Bae, J. H., Han, D. and Chung, T. D. 2016. Confined molecular dynamics for suppressing kinetic loss in sugar fuel cell. Electrochim. Acta, 187, 457-464.
39. Seo, M., Bae, J. H., Hwang, D. W., Kwak, B., Yun, J., Lim, S. Y. and Chung, T. D. 2017. Catalytic electron transfer at nanoporous indium tin oxide electrodes. Electrochim. Acta, 258, 90-97.
40. Kim, S. H., Choi, J. B., Nguyen, Q. N., Lee, J. M., Park, S., Chung, T. D. and Byun, J. Y. 2013. Nanoporous platinum thin films synthesized by electrochemical dealloying for nonenzymatic glucose detection. Phys. Chem. Chem. Phys., 15, 5782-5787.
41. Park, S., Kim, H. C. and Chung, T. D. 2012. Electrochemical analysis based on nanoporous structures. Analyst, 137, 3891-3903.

## **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАНОПОРИСТЫХ ЭЛЕКТРОДОВ ДЛЯ НЕФЕРМЕНТАТИВНЫХ СЕНСОРОВ ГЛЮКОЗЫ**

**А.Г.КАРИМОВА, С.Г.НУРИЕВА, А.М.РАГИМЛИ**

### **РЕЗЮМЕ**

Успешное применение неферментативных сенсорных систем в медицине для определения концентрации глюкозы связано с разработкой нанопористых электродов. Установлено, что малые размеры пор этих электродов и определенные значения толщины нанопористых слоев позволяют добиться эффективных результатов в концентрированной плазме или кровяной среде человека.

Статья посвящена анализу процесса электрохимического окисления глюкозы в неферментативных сенсорных системах с использованием нанопористых электродов.

**Ключевые слова:** глюкоза, сенсор, наноструктурированные электроды, электрокатализ, электрохимическое окисление.

## **FUNCTIONAL CHARACTERISTICS OF NANOPOROUS ELECTRODES FOR NON-ENZYMATIC GLUCOSE SENSORS**

**A.H.KARIMOVA, S.G.NURIYEVA, A.M.RAHIMLI**

### **SUMMARY**

Successful application of the non-enzymatic glucose sensor systems in medicine is related to the development of nanoporous electrodes. It is found that the small pore size of these electrodes and the certain thickness values of the nanoporous layers allow achieving effective results in concentrated human plasma or blood medium.

The article is devoted to the analysis of the electrochemical oxidation process of glucose that occurs in the non-enzymatic sensor systems via using nanoporous electrodes.

**Keywords:** glucose, sensor, nanostructured electrodes, electrocatalysis, electrochemical oxidation

UOT 539.12-17

## THE DECAY CHANNELS OF HIGGS BOSONS

$$H(\mathbf{h}; A) \Rightarrow \chi_i^- \chi_j^+, H(\mathbf{h}; A) \Rightarrow \chi_i^0 \chi_j^0$$

E.Sh.OMAROVA

*Baku State University**emiliya.abdullayeva@inbox.ru*

*Within the framework of the Minimal Supersymmetric Standard Model, the decay channels of  $H, h, A$  Higgs bosons into a pair of chargino  $H(\mathbf{h}; A) \Rightarrow \chi_i^- \chi_j^+$ ; a pair of neutralino  $H(\mathbf{h}; A) \Rightarrow \chi_i^0 \chi_j^0$  were considered. Taking into account the polarization states of the chargino and neutralino, analytical expressions for these decay widths are obtained and the degree of the longitudinal and transverse polarizations of the chargino and neutralino, as well as the dependence of the decay width on the Higgs boson mass are studied in detail.*

**Keywords:** Minimal Supersymmetric Standard Model, Standard Model, Higgs boson, chargino, neutralino, spirality, decay width.

## 1. Introduction

The Standard Model (SM), based on the local gauge symmetry  $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ , satisfactorily describes the physics of electroweak and strong interactions of leptons, quarks and gauge bosons[1-4]. The scalar field doublet

$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$ , the neutral component of which possesses a nonzero vacuum value,

has been introduced into theory. The Higgs boson  $H_{SM}$  appears as a result of spontaneous symmetry breaking due to quantum excitations of the scalar field, and, due to its interaction with this field, the gauge bosons ( $W^\pm$  and  $Z^0$ ), charged leptons, and quarks acquire mass. This mechanism of generation of particle masses is known as the Higgs mechanism of spontaneous symmetry breaking. The Higgs boson with characteristics corresponding to the predictions of the SM was discovered by the ATLAS and CMS collaborations in 2012 at the Large Hadron Collider (LHC) at CERN [5,6] (see also review [7-9]). With the discovery of the Higgs boson with a mass of around 125 GeV, a missing brick in the structure of the SM was found and the mechanism for generating masses of fundamental particles, the mechanism of spontaneous breaking of the Braut – Englert – Higgs symmetry, was experimentally confirmed

[7,8]. It should be noted that the path to the discovery of the Higgs boson was a long one; at the same time, there has been a tremendous burst of interest, both theoretical and experimental, in the various channels of decay and production of the Higgs boson  $H_{SM}$ . The various decay channels of the standard Higgs boson has been examined in a number of works [6,11,12,13-17].

The Feynman diagrams of various processes and compare with the corresponding experimental data are calculated accurately in the SM. The agreement between the SM and the experience is strikingly good. Nevertheless, SM has its own difficulties. Many of them are connected with the fact that this model describes a lot, but is not able to explain where it came from, does not allow it to be deduced from deeper principles.

According to SM, neutrinos ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) are massless particles. However, it has been experimentally proved that neutrinos have mass, and they are actively mixed with each other. The masses and mixing of neutrinos is not due to the Higgs mechanism, but due to a phenomenon of a different nature. In the SM there are no such phenomena, and in theories outside the SM such mechanisms exist.

One of the difficulties of SM is related to the problem of hierarchy. It is known that according to quantum field theory, vacuum is not an absolute void, but a sea of virtual particles. All real particles of our world are particles dressed in a virtual fur coat. Masses, charges and other characteristics of the observed particles are the characteristics of particles dressed in a fur coat. Theorists take this phenomenon into account using a mathematical procedure called renormalization. The fact is that renormalization works well for all particles, but in the case of the Higgs boson, a problem arises: the influence of virtual particles on the Higgs boson mass is too strong, as a result, the boson mass increases trillions of times, and such a particle can no longer play the role of the Higgs boson. This difficulty is called the hierarchy problem. This way out of this situation is possible. If in nature there are some other particles that do not exist in the SM, then in a virtual form they can compensate for the influence of the boson on the Higgs mass. The most important thing here is that in supersymmetric theories such compensation itself arises from the construction of the theory. It is such a supersymmetric theory that most attracts theorists.

Another important difficulty of SM is the lack of dark matter particles in it. In astrophysics, it is believed that in the Universe, in addition to ordinary matter in the form of stars, black holes, planets, gas and dust clouds, and. etc., there are particles of a completely different nature. These are particles of dark matter, we do not see them, they practically do not interact with ordinary matter and radiation. Possible candidates for dark matter particles may be neutralino, sneutrino, gluino, gravitino, the existence of which is assumed in the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM) [12-14].

Note that in contrast to the Standard Model, two doublets of a complex

scalar field are introduced:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix}.$$

In order to obtain the physical fields of the Higgs boson, the fields  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  are represented in the form

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_1 + H_1^0 + iP_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_2^+ \\ v_2 + H_2^0 + iP_2^0 \end{pmatrix}.$$

Here  $H_1^0, P_1^0, H_2^0$  and  $P_2^0$  are fields describing excitations of the system relative to the vacuum states  $\langle \varphi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1$  and  $\langle \varphi_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2$ . By mixing the fields  $H_1^0$  and  $H_2^0$  one obtains the CP-even Higgs bosons  $H$  and  $h$  (mixing angle  $\alpha$ ):

$$\begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_2^0 \end{pmatrix}.$$

Similarly mixing  $P_1^0$  and  $P_2^0$ , as well as  $H_1^\pm$  and  $H_2^\pm$ , are obtains Goldstone bosons  $G^0$  and  $G^\pm$ , CP-odd Higgs boson  $A$  and charged Higgs bosons  $H^\pm$  (mixing angle  $\beta$ ):

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^\pm \\ H_2^\pm \end{pmatrix},$$

Thus, after spontaneous symmetry breaking in the MSSM five Higgs particles appear: the scalar  $H$ - and  $h$ -bosons, the pseudoscalar  $A$ -boson, and charged  $H^\pm$ -bosons.

The Higgs sector of the MSSM is characterized by six parameters  $M_H, M_h, M_A, M_{H^\pm}, \alpha$  and  $\beta$ . Of these six parameters only two are free: the ones that are usually chosen  $M_A$  and  $\tan\beta$ . The parameter  $\tan\beta$  varies within  $1 \leq \tan\beta \leq \frac{m_t}{m_b} = 35.5$ , here  $m_t = 173,2$  GeV and  $m_b = 4.88$  GeV of masses of t- and b- quarks.

The masses of the  $H$ - and  $h$ - ( $H^\pm$ ) bosons are expressed as  $M_A$  and  $M_Z$  ( $M_A$  and  $M_W$ ):

$$M_{H(h)}^2 = \frac{1}{2} \left[ M_A^2 + M_Z^2 \pm \sqrt{(M_A^2 + M_Z^2)^2 - 4M_A^2 M_Z^2 \cos^2 2\beta} \right],$$

$$M_{H^\pm}^2 = M_A^2 + M_W^2.$$

The mixing angles of the fields,  $\alpha$  and  $\beta$  are related by the equation

$$\tan 2\alpha = \tan 2\beta \cdot \frac{M_A^2 + M_Z^2}{M_A^2 - M_Z^2}, \quad \left( -\frac{\pi}{2} \leq \alpha < 0 \right).$$

Higgs bosons  $H, h, A$  and  $H^\pm$  can decay through different channels (see [8,11-18]). Along with decays of these bosons into ordinary particles, their decay into supersymmetric ones is also possible (SUSY) particles: Chargino, neutralino, and scalar fermions (sfermions) are such particles. In the present paper, the de-



cay channels of the Higgs bosons  $H, h$  and  $A$  in the MSSM into a pair of supersymmetric particles

$$H(h; A) \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- + \tilde{\chi}_j^+, \quad (i, j = 1, 2), \quad (1)$$

$$H(h; A) \Rightarrow \tilde{\chi}_i^0 + \tilde{\chi}_j^0, \quad (i, j = 1 \div 4). \quad (2)$$

Within the framework of the Minimal Supersymmetric Standard Model and taking into account the polarization states of the chargino and neutralino, analytical expressions for the width of the investigated decays are obtained and the degrees of the longitudinal and transverse polarizations of the chargino and neutralino are determined, the dependence of these characteristics and the width of the decays on the mass of Higgs bosons is studied.

## 2. The decay channels of Higgs boson into a pair of chargino

The supersymmetric parameters of the gauge  $W^\pm$  and Higgs  $H^\pm$  - bosons are gaugino (vino)  $\tilde{W}^\pm$  and Higgsino  $\tilde{H}^\pm$ . The mass matrix of these spinor fields is off-diagonal, which leads to their mixing. Chargino  $\tilde{\chi}^\pm$  is a four-component Dirac fermion that occurs when vino  $\tilde{W}^\pm$  and Higgsino  $\tilde{H}^\pm$  are mixed. The masses and coupling constants of the chargino with the Higgs bosons  $H, h, A, H^\pm$  are determined by the mass matrix.

$$M_{\tilde{\chi}^\pm} = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2}M_W \sin\beta \\ \sqrt{2}M_W \cos\beta & \mu \end{pmatrix},$$

where  $M_2$  and  $\mu$  - mass parameters of vino and Higgsino. This matrix is diagonalized by two real two-row  $U$  and  $V$  matrices.

$$UM_{\tilde{\chi}^\pm}V^{-1} \Rightarrow U = R_- \text{ and } V = \begin{cases} R_+, & \text{if } \det M_{\tilde{\chi}^\pm} > 0 \\ \sigma_3 R_+, & \text{if } \det M_{\tilde{\chi}^\pm} < 0, \end{cases}$$

where  $\sigma_3$  is the Pauli matrix, which makes the chargino mass positive,  $R_\pm$  are the rotation matrices with angles  $\theta_\pm$ :

$$R_\pm = \begin{pmatrix} \cos\theta_\pm & \sin\theta_\pm \\ -\sin\theta_\pm & \cos\theta_\pm \end{pmatrix},$$

and the angles  $\theta_+$  and  $\theta_-$  are defined as

$$\begin{aligned} \tan 2\theta_+ &= \frac{2\sqrt{2}M_W(M_2 \sin\beta + \mu \cos\beta)}{M_2^2 - \mu^2 + 2M_W^2 \cos\beta}, \quad \tan 2\theta_- \\ &= \frac{2\sqrt{2}M_W(M_2 \cos\beta + \mu \sin\beta)}{M_2^2 - \mu^2 - 2M_W^2 \cos\beta}. \end{aligned}$$

After diagonalizing the matrix  $M_{\tilde{\chi}^\pm}$ , new states of chargino with masses are obtained

$$m_{\tilde{\chi}_{1,2}^\pm}^2 = \frac{1}{2} \{ M_2^2 + \mu^2 + 2M_W^2 \mp$$

$$\mp[(M_2^2 + \mu^2)^2 + 4M_W^2(M_W^2 \cos^2 2\beta + M_2^2 + \mu^2 2M_2 \mu \sin 2\beta)]^{1/2} \quad (3)$$

With a very large value of the parameter  $|\mu|$  ( $|\mu| \rightarrow \infty$ ), light chargino corresponds to the state of vino with mass  $m_{\tilde{\chi}_1^\pm} \cong M_2$ , and heavy chargino corresponds to the state of Higgsino with mass  $m_{\tilde{\chi}_2^\pm} \cong |\mu|$ . However, for  $M_2 \gg |\mu|$  and  $|\mu| \sim M_Z$ , the charginos  $\tilde{\chi}_1^\pm$  and  $\tilde{\chi}_2^\pm$  exchange roles:  $m_{\tilde{\chi}_1^\pm} \cong |\mu|$ ,  $m_{\tilde{\chi}_2^\pm} \cong M_2$ .

In fig. 1 the dependence of the chargino masses  $m_{\tilde{\chi}_1^\pm}$  and  $m_{\tilde{\chi}_2^\pm}$  on the parameter  $\mu$  are shown at  $\tan\beta = 3$  and  $M_2 = 150$  GeV. As follows from the figure, with an increase in the parameter  $\mu$ , the mass of both charginos first decreases and reaches a minimum near  $\mu = 0$ , and with a further increase in the parameter  $\mu$ , the masses  $m_{\tilde{\chi}_1^\pm}$  and  $m_{\tilde{\chi}_2^\pm}$  begin to grow. The minimum value of the chargino mass  $m_{\tilde{\chi}_1^\pm}$  and  $m_{\tilde{\chi}_2^\pm}$  is observed at a zero value of the parameter  $\mu$ .

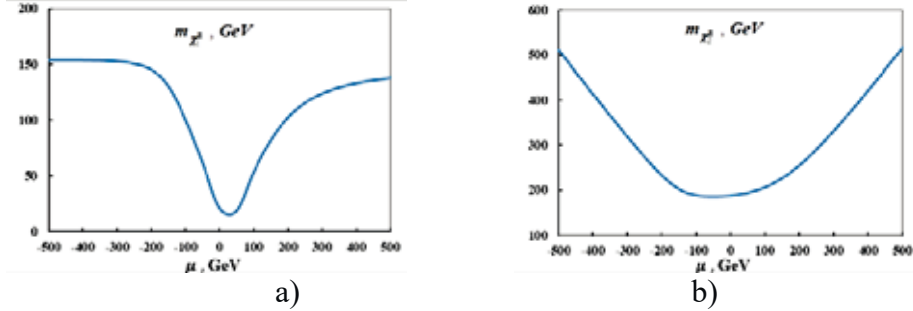


Fig.1. Chargino masses  $m_{\tilde{\chi}_1^\pm}$  (a) and  $m_{\tilde{\chi}_2^\pm}$  (b) as a function of the parameter  $\mu$

The Feynman diagram of the Higgs boson decay  $H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- + \tilde{\chi}_j^+$  is shown in fig. 2 (the  $k=1,2,3$  index corresponds to the neutral Higgs bosons  $H$ ,  $h$ ,  $A$  and the  $i, j=1,2$  indexes correspond to the chargino).

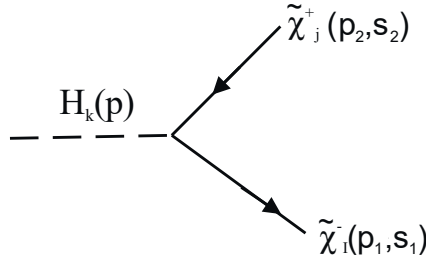


Fig. 2. Feynman diagram for  $H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- \tilde{\chi}_j^+$  decay

In the figure  $p$ ,  $p_1$  and  $p_2$  denote 4 - momenta of Higgs boson  $H_k$ ,  $\tilde{\chi}_i^-$  and

$\tilde{\chi}_j^+$  chargino,  $s_1$  and  $s_2$  4 - polarization vectors of chargino.

According to the MSSM, the amplitude corresponding to the diagram in fig. 2 can be written in the following form:

$$M(H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- \tilde{\chi}_j^+) = ig [g_{ijk}^L \bar{u}(p_1, s_1) P_L v(p_2, s_2) + g_{ijk}^R \bar{u}(p_1, s_1) P_R v(p_2, s_2)], \quad (4)$$

here  $g$  is a constant determining the mass of the gauge  $w$  - boson  $M_W^2 =$

$\frac{1}{2} g^2 (v_1^2 + v_2^2)$ ;  $P_L = \frac{(1+\gamma_5)}{2}$ ,  $P_R = \frac{(1-\gamma_5)}{2}$  are chirality matrices,  $g_{ijk}^L$  and  $g_{ijk}^R$  is interaction constants of the Higgs boson  $H_k$  with chargino  $\tilde{\chi}_i^- \tilde{\chi}_j^+$  [12,14]

$$g_{ijk}^L = \frac{1}{\sqrt{2}} [V_{j1} U_{i2} e_k - V_{j2} U_{i1} d_k], \quad (5)$$

$$g_{ijk}^R = \frac{1}{\sqrt{2}} [V_{i1} U_{j2} e_k - V_{i2} U_{j1} d_k] \epsilon_k,$$

Here  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -\epsilon_3 = 1$ ; the coefficients  $e_k$  and  $d_k$  are equal to:

$$e_1 = \cos\alpha, e_2 = -\sin\alpha, e_3 = -\sin\beta, \quad (6)$$

$$d_1 = -\sin\alpha, d_2 = -\cos\alpha, d_3 = \cos\beta.$$

To find the width of the Higgs boson decay into a pair of chargino, the amplitude modules  $|M(H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- \tilde{\chi}_j^+)|^2$  are squared. In the standard way the squared amplitude module is represented in the form:

$$|M(H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- \tilde{\chi}_j^+)|^2 = \frac{g^2}{2} \{ [(g_{ijk}^L)^2 + (g_{ijk}^R)^2] [(p_1 \cdot p_2) + m_{\tilde{\chi}_i} m_{\tilde{\chi}_j} (s_1 \cdot s_2)] + [(g_{ijk}^L)^2 - (g_{ijk}^R)^2] \times [m_{\tilde{\chi}_i} (p_2 \cdot s_1) + m_{\tilde{\chi}_j} (p_1 \cdot s_2)] + 2g_{ijk}^L g_{ijk}^R [-m_{\tilde{\chi}_i} m_{\tilde{\chi}_j} - (p_1 \cdot p_2)(s_1 \cdot s_2) + (p_1 \cdot s_2)(p_2 \cdot s_1)] \}. \quad (7)$$

In the Higgs boson rest system  $H_k$  the energy and the modules of the three-dimensional chargino momentums are determined by the expressions:

$$E_1 = \frac{1}{2} M_H (1 + r_i - r_j), \quad E_2 = \frac{1}{2} M_H (1 - r_i + r_j),$$

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}| = \frac{1}{2} M_H \sqrt{(1 - r_i - r_j)^2 - 4r_i r_j},$$

here the notation

$$r_i = \left( \frac{m_{\tilde{\chi}_i^\pm}}{M_{H_k}} \right)^2, \quad r_j = \left( \frac{m_{\tilde{\chi}_j^\pm}}{M_{H_k}} \right)^2.$$

Given the polarization states of the chargino  $\tilde{\chi}_i^-$  and  $\tilde{\chi}_j^+$ , the decay width  $H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- + \tilde{\chi}_j^+$  has the form:

$$\frac{d\Gamma(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2)}{d\Omega} = \frac{G_F M_W^2}{32\sqrt{2}\pi^2} M_{H_k} \sqrt{(1 - r_i - r_j)^2 - 4r_i r_j} \{ [(g_{ijk}^L)^2 + (g_{ijk}^R)^2] [(1 - r_i - r_j)(1 - (\vec{n}\vec{\xi}_1)(\vec{n}\vec{\xi}_2)) + 2\sqrt{r_i r_j} \times (-(\vec{\xi}_1 \vec{\xi}_2) + (\vec{n}\vec{\xi}_1)(\vec{n}\vec{\xi}_2))] + [(g_{ijk}^L)^2 - (g_{ijk}^R)^2] \} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sqrt{(1-r_i-r_j)^2 - 4r_i r_j} [(\vec{n}\vec{\xi}_1) - (\vec{n}\vec{\xi}_2)] - 4g_{ijk}^L g_{ijk}^R \times [\sqrt{r_i r_j} (1 - \\ & (\vec{n}\vec{\xi}_1)(\vec{n}\vec{\xi}_2)) - \\ & - \frac{1}{2}(1-r_i-r_j)((\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2) - (\vec{n}\vec{\xi}_1)(\vec{n}\vec{\xi}_2))] \}, \end{aligned} \quad (8)$$

where  $\vec{n}$  is the unit vector, in the direction of the momentum of the chargino  $\tilde{\chi}_i^-$ ,  $\vec{\xi}_1$  and  $\vec{\xi}_2$  are the unit vectors characterizing the polarization of the chargino  $\tilde{\chi}_i^-$  and  $\tilde{\chi}_j^+$  in the rest systems of each of these particles, respectively.

$\lambda(r_i, r_j) = (1-r_i-r_j)^2 - 4r_i r_j$  is kinematic function of a two-particle phase volume.

Particular cases of the decay width are considered. First, suppose that the chargino is polarized longitudinally, while

$$\vec{\xi}_1 = \vec{n}\lambda_1, \quad \vec{\xi}_2 = -\vec{n}\lambda_2,$$

where  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are the spiralities of the chargino  $\tilde{\chi}_i^-$  and  $\tilde{\chi}_j^+$

In this case, the decay width  $H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- + \tilde{\chi}_j^+$  is determined by the expression:

$$\Gamma(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{4} \Gamma_0(H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- \tilde{\chi}_j^+) [1 + \lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)P], \quad (9)$$

here

$$\begin{aligned} \Gamma_0(H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- \tilde{\chi}_j^+) &= \frac{G_F M_W^2}{2\sqrt{2}\pi} M_{H_k} \sqrt{(1-r_i-r_j)^2 - 4r_i r_j} \left\{ [(g_{ijk}^L)^2 + \right. \\ & \left. (g_{ijk}^R)^2] (1-r_i-r_j) - 4g_{ijk}^L g_{ijk}^R \sqrt{r_i r_j} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

is the decay width in the case of unpolarized chargino, and  $P$  is the degree of longitudinal polarization of chargino, defined by the formula

$$P = \frac{[(g_{ijk}^L)^2 - (g_{ijk}^R)^2] \sqrt{(1-r_i-r_j)^2 - 4r_i r_j}}{[(g_{ijk}^L)^2 + (g_{ijk}^R)^2] (1-r_i-r_j) - 4g_{ijk}^L g_{ijk}^R \sqrt{r_i r_j}}. \quad (11)$$

As can be seen from the formula for the decay width (9), the charginos  $\tilde{\chi}_i^-$  and  $\tilde{\chi}_j^+$  should have the same spiralities  $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ . Consequently, in the decays of the Higgs bosons  $H, h, A$  the charginos  $\tilde{\chi}_i^-$  and  $\tilde{\chi}_j^+$  are polarized either to the right ( $\tilde{\chi}_{iR}^- \tilde{\chi}_{jR}^+$ ) or to the left ( $\tilde{\chi}_{iL}^- \tilde{\chi}_{jL}^+$ ). This is a consequence of the conservation of the total angular momentum in the  $H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- + \tilde{\chi}_j^+$  decays.

Now consider the case when the charginos are transversely polarized. Where in

$$\begin{aligned} (\vec{n}\vec{\xi}_1) &= (\vec{n}\vec{\eta}_1) = 0, \quad (\vec{n}\vec{\xi}_2) = (\vec{n}\vec{\eta}_2) = 0 \\ (\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2) &= (\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2) = \eta_1 \eta_2 \cos\varphi \end{aligned}$$

here  $\vec{\eta}_1$  and  $\vec{\eta}_2$  are the transverse components of the chargino vectors  $\tilde{\chi}_i^-$  and

$\tilde{\chi}_j^+$ ,  $\varphi$  is the angle between these vectors. In this case, the decay width  $H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- + \tilde{\chi}_j^+$  is

$$\frac{d\Gamma(\eta_1\eta_2)}{d\Omega} = \frac{1}{4} \frac{d\Gamma_0(H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- \tilde{\chi}_j^+)}{d\Omega} [1 + \eta_1\eta_2 P_\perp], \quad (12)$$

where

$$\frac{d\Gamma_0(H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- \tilde{\chi}_j^+)}{d\Omega} = \frac{G_F M_W^2}{8\sqrt{2}\pi^2} M_{H_k} \sqrt{\lambda(r_i, r_j)} \left\{ \left[ (g_{ijk}^L)^2 + (g_{ijk}^R)^2 \right] (1 - r_i - r_j) - 4g_{ijk}^L g_{ijk}^R \sqrt{r_i r_j} \right\} \quad (13)$$

is the decay width for unpolarized chargino, and  $P_\perp$  is the degree of transverse polarization of chargino :

$$P_\perp = \frac{2g_{ijk}^L g_{ijk}^R (1 - r_i - r_j) - 2 \left[ (g_{ijk}^L)^2 + (g_{ijk}^R)^2 \right] \sqrt{r_i r_j}}{\left[ (g_{ijk}^L)^2 + (g_{ijk}^R)^2 \right] (1 - r_i - r_j) - 4g_{ijk}^L g_{ijk}^R \sqrt{r_i r_j}} \cdot \cos\varphi.. \quad (14)$$

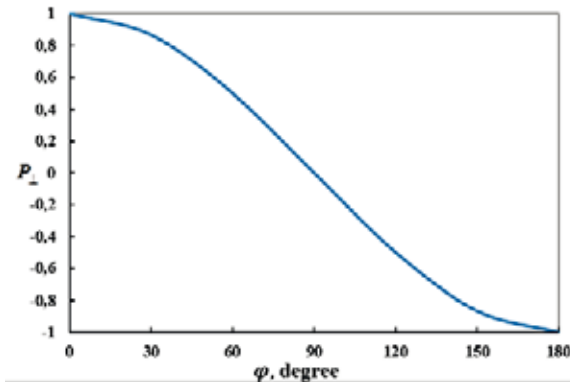
At  $\tan\beta = 1$  due to the equality of the interaction constants  $g_{ijk}^L = g_{ijk}^R$  the degree of transverse polarization depends only on the cosine of the angle between the spin vectors  $\vec{\eta}_1$  and  $\vec{\eta}_2$  :

$$P_\perp = \cos\varphi \quad (15)$$

At  $\varphi = 0^\circ$  the degree of transverse polarization of the chargino is +1, with increasing angle  $\varphi$ , the degree of transverse polarization decreases and vanishes at an angle  $\varphi = 90^\circ$ . Then, the degree of transverse polarization changes sign and decreases to  $-1$  at  $\varphi = 180^\circ$ . A further increase in the angle  $\varphi$  from  $180^\circ$  to  $360^\circ$  leads to an increase in the degree of transverse polarization from  $-1$  to  $+1$ .

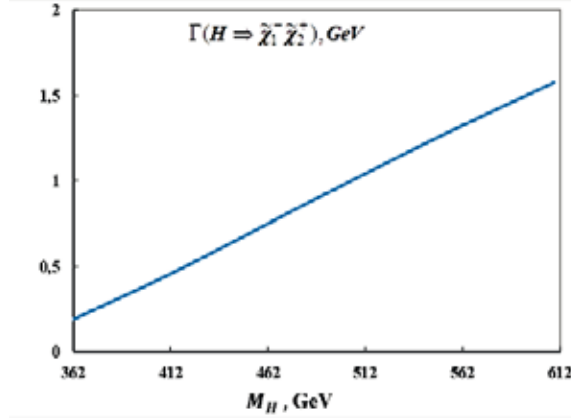
It should be noted that in the approximation  $|\mu| \gg M_2$  or  $M_2 \gg |\mu|$  the decays of the Higgs bosons into a pair of identical chargino  $H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_1^- + \tilde{\chi}_1^-$  ( $\tilde{\chi}_2^+ + \tilde{\chi}_2^+$ ) are suppressed.

Figure 3 shows the dependence of the degree of transverse polarization of the chargino on the azimuthal angle  $\varphi$ .



**Fig.3.** Dependence of the degree of transverse polarization of the chargino on the angle  $\varphi$

Figure 4 indicates the dependence of decay width  $H \Rightarrow \tilde{\chi}_1^- + \tilde{\chi}_2^+$  on the Higgs boson mass  $M_H$  at  $tg\beta=1$ ,  $\mu=160$  GeV,  $M_2=150$  GeV,  $M_W=80.385$  GeV,  $M_Z=91.1875$  GeV. With an increase on the Higgs boson mass  $M_H$  the decay width increases.



**Fig. 4.** Dependence of the decay width  $H \Rightarrow \tilde{\chi}_1^- \tilde{\chi}_2^+$  on the mass  $M_H$

## 2. Higgs boson decays into a pair of neutralino

Neutral wino  $\tilde{W}^0$  and bino  $\tilde{B}^0$ , as well as Higgsino  $\tilde{H}_1^0$  and  $\tilde{H}_2^0$  interact weakly, they are not proper mass states. The four mass states of the neutralino  $\tilde{\chi}_i^0$  ( $i = 1,2,3,4$ ) are alternating combinations of the particles mentioned above. Neutralino - Majorana fermions, their antiparticles coincide with their particles. The neutralino mass matrix, as in the case of the chargino, depends on the parameters  $M_2$ ,  $\tan\beta$  and also on the new mass parameter  $M_1$  of the bino  $\tilde{B}^0$  [8, 11]. As in the case of the chargino, with a large value of one of the parameters  $\mu$  or  $M_2$ , two neutralino correspond to a pure gaugino-like state, and the other neutralino ones correspond to a pure Higgsino-like state. In these limiting states, the neutralino masses are equal to:

at  $|\mu| \gg M_Z$ ,  $M_2 \sim M_Z$ :  $m_{\tilde{\chi}_1^0} \sim M_1$ ,  $m_{\tilde{\chi}_2^0} \sim M_2$ ,  $m_{\tilde{\chi}_3^0} \cong m_{\tilde{\chi}_4^0} \cong |\mu|$ ,  
at  $|\mu| \sim M_Z$ ,  $M_2 \gg M_Z$ :  $m_{\tilde{\chi}_1^0} \cong m_{\tilde{\chi}_2^0} \cong |\mu|$ ,  $m_{\tilde{\chi}_3^0} \cong M_1$ ,  $m_{\tilde{\chi}_4^0} \cong M_2$ .

The decay width of the Higgs bosons  $H_k$  into a neutralino pair for arbitrarily polarized particles is determined by a formula similar to formula (8). In a particular case, the decay width  $H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^0 + \tilde{\chi}_j^0$  in the case of the production of a longitudinally polarized neutralino pair is determined by the expression:

$$\Gamma(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{4} \Gamma_0(H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^0 \tilde{\chi}_j^0) [1 + \lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)P], \quad (16)$$

Here

$$\Gamma_0(H_k \Rightarrow \tilde{\chi}_i^0 \tilde{\chi}_j^0) = \frac{G_F M_W^2}{2\sqrt{2}\pi} M_{H_k} \delta \sqrt{\lambda(r_i, r_j)} \times$$

$$\times \left\{ \left[ (g_{ijk}^L)^2 + (g_{ijk}^R)^2 \right] (1 - r_i - r_j) - 4\varepsilon_i \varepsilon_j g_{ijk}^L g_{ijk}^R \sqrt{r_i r_j} \right\} \quad (17)$$

is the width of this decay in the case of unpolarized neutralino, and  $P$  is the degree of longitudinal polarization of neutralino, defined by the expression

$$P = - \frac{\left[ (g_{ijk}^L)^2 - (g_{ijk}^R)^2 \right] \sqrt{\lambda(r_i, r_j)}}{\left[ (g_{ijk}^L)^2 + (g_{ijk}^R)^2 \right] (1 - r_i - r_j) - 4\varepsilon_i \varepsilon_j g_{ijk}^L g_{ijk}^R \sqrt{r_i r_j}}; \quad (18)$$

the factor  $\delta$  in formula (17) is equal to  $1 \left( \frac{1}{2} \right)$ , if a pair of different (identical) neutralinos are born,  $\varepsilon_i$  and  $\varepsilon_j$  determine the sign of the parameter  $\mu$ ,  $g_{ijk}^L$  and  $g_{ijk}^R$  are the interaction constants of the Higgs boson  $H_k$  with a pair of neutralino [12,14] :

$$\begin{aligned} g_{ijk}^L &= \frac{1}{2} (Z_{j2} - \tan\theta_W Z_{j1}) (Z_{i3} e_k + Z_{i4} d_k) + i \rightarrow j, \\ g_{ijk}^R &= \frac{1}{2} (Z_{j2} - \tan\theta_W Z_{j1}) (Z_{i3} e_k + Z_{i4} d_k) \epsilon_k + i \rightarrow j; \end{aligned} \quad (19)$$

$Z$  - 4x4 matrix diagonalizing the neutralino mass matrix;  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = 1$ ; the coefficients  $e_k$  and  $d_k$  are given by expressions (6);  $\theta_W$  is the Weinberg angle.

The simplest neutralino, which is denoted by  $\tilde{\chi}^0$  can be the easiest SUSY particle. Then all other SUSY particles will decay into  $\tilde{\chi}^0$  and ordinary SM particles. Table 1 shows the upper bounds on the masses of SUSY particles for various values of the parameter  $\tan\beta$ . In the table,  $\tilde{\tau}$  and  $\tilde{t}$  are sfermions - stau lepton and stop quark.

Table 1

**Upper Boundaries for SUSY Particle Masses**

$\tan\beta$	$\tilde{\chi}^0$	$\tilde{\chi}^-$	$\tilde{\tau}$	$\tilde{t}$
10	155	280	170	580
15	168	300	185	640
20	220	400	236	812
30	260	470	280	990

Calculations show that the decay widths of the heavy Higgs bosons H and A into a pair of different neutralinos  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_3^0$ ,  $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_4^0$ ,  $\tilde{\chi}_2^0 \tilde{\chi}_3^0$  and  $\tilde{\chi}_2^0 \tilde{\chi}_4^0$  are prevailed.

The width of these decays are shown in Table 2 (in units of  $\frac{G_F M_W^2}{8\sqrt{2}\pi} M_{H_k}$ ).

Table 2

**Decay widths of H and A into a neutralino pair**

Neutralino pair	$\Gamma(H \Rightarrow \tilde{\chi}_i^0 \tilde{\chi}_j^0)$	$\Gamma(A \Rightarrow \tilde{\chi}_i^0 \tilde{\chi}_j^0)$
$\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_3^0$	$\tan^2 \theta_W (1 + \sin 2\beta)$	$\tan^2 \theta_W (1 - \sin 2\beta)$
$\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_4^0$	$\tan^2 \theta_W (1 - \sin 2\beta)$	$\tan^2 \theta_W (1 + \sin 2\beta)$
$\tilde{\chi}_2^0 \tilde{\chi}_3^0$	$(1 + \sin 2\beta)$	$(1 - \sin 2\beta)$
$\tilde{\chi}_2^0 \tilde{\chi}_4^0$	$(1 - \sin 2\beta)$	$(1 + \sin 2\beta)$

In fig. 5 and 6 the dependence of the decay width  $H \Rightarrow \tilde{\chi}_2^0 + \tilde{\chi}_3^0$  and  $A \Rightarrow \tilde{\chi}_2^0 + \tilde{\chi}_4^0$  on the Higgs boson mass  $M_H$  and  $M_A$  for  $\tan\beta = 3$ ,  $\sin^2\theta_W = 0.2315$  are illustrated. These figures indicates that with increasing the  $H$  and  $A$  Higgs boson masses the decay width  $H \Rightarrow \tilde{\chi}_2^0 + \tilde{\chi}_3^0$  and  $A \Rightarrow \tilde{\chi}_2^0 + \tilde{\chi}_4^0$  increases, respectively.

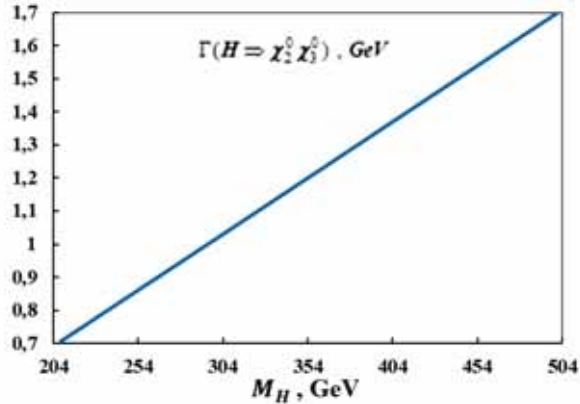


Fig. 5. Dependence of the decay width  $H \Rightarrow \tilde{\chi}_2^0 + \tilde{\chi}_3^0$  on the mass  $M_H$

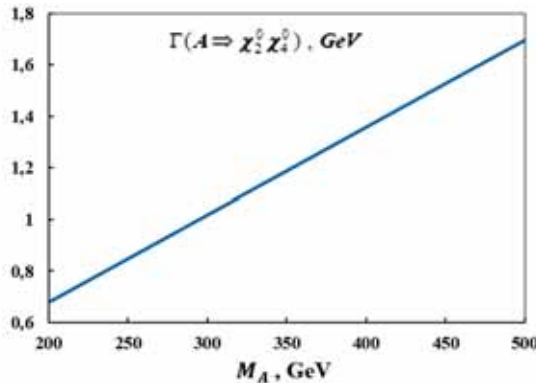


Fig. 6. Dependence of the decay width  $A \Rightarrow \tilde{\chi}_2^0 + \tilde{\chi}_4^0$  on the mass  $M_A$

### 3. Conclusion

Thus, the decay channels of the Higgs bosons  $H, h, A$  into supersymmetric particles are discussed, precisely, decays into a pair of chargino  $H(h; A) \Rightarrow \tilde{\chi}_i^- + \tilde{\chi}_j^+$ , decays into a pair of neutralino  $H(h; A) \Rightarrow \tilde{\chi}_i^0 + \tilde{\chi}_j^0$ . In the framework of the MSSM, analytical expressions are obtained for the decay width and the dependence of the decay width on the Higgs boson mass is determined. The research results are illustrated by graphs.

### BIBLIOGRAPHY

1. A. A. Sokolov, I. M. Ternov, V. Ch. Zhukowski and A. V. Borisov , Gauge fields // Moscow State University Press, Moscow (1986) [in Russian].
2. A. Djouadi. The Anatomy of Electro-weak symmetry Breaking, Tome I, arXiv : 050317v2



- [hep-ph], 2005.
3. V. M. Emelyanov. The Standard Model and Its Extension. Fizmatlit, Moscow (2007) [in Russian].
  4. S. K. Abdullayev. General Properties of Fundamental Interactions, Zeka Print, Baku (2018) [in Azerbaijani].
  5. ATLAS Collaboration. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson at the ATLAS detector at the LHC. Phys. Letters., B 716, 2012, p. 1-29.
  6. CMS Collaboration. Observation of a new boson at mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. Phys. Letters, B 716, 2012, p. 30-61.
  7. V. A. Rubakov. On Large Hadron Colliders discovery of a new particle with Higgs boson properties. // UFN, 2012, v.182, №10, p.1017-1025 (in Russian).
  8. E. E. Boos. Standard Model and predictions for Higgs boson. // UFN, 2014, v.184, №9, p.986-996 (in Russian).
  9. A. V. Lanev. CMS Collaboration results: Higgs boson and search for new physics. // UFN, 2014, v.184, №9, p.996-1004 (in Russian).
  10. D. I. Kazakov. The Higgs boson is found: what is next?. // UFN, 2014, v.184, №9, p.1004-1016 (in Russian).
  11. P. W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. // Phys. Rev. Letters, 1964, V.13, №16, p.508.
  12. F. Englert, R. Broot. Broken Symmetry and the mass of gauge vector bosons. // Phys. Rev. Letters, 1964, V.13, №9, p.321.
  13. J. F. Gunion, H. E. Haber. Higgs bosons in supersymmetric models (I) // Nucl. Phys., 1986, v. B 272, p.1-76.
  14. J. F. Gunion, H. E. Haber. Higgs bosons in supersymmetric models (II) // Nucl. Phys., 1986, v. B 278, p.449-492.
  15. A. Djouadi The Anatomy of Electro-Weak Symmetry Breaking. Tome II. The Higgs Boson in the MSSM. arXiv: hep – ph / 0503173v2, 2003.
  16. A. Djouadi, J. Kalinovski, P. M. Zerwas. Two – and Three- Body Decay Modes of SUSY Higgs Particles. arXiv: hep – ph / 9511342v1, 1995.
  17. S. K. Abdullayev, E. Sh. Omarova. Two- and three-particle decay channels of supersymmetric Higgs bosons. // Azerb. Journal of Physics, Fizika, 2019, V. XXV, №4, p. 29-39.

## HİQQS BOZONLARIN PARÇALANMA KANALLARI

$$H(h; A) \Rightarrow \chi_i^- \chi_j^+, H(h; A) \Rightarrow \chi_i^0 \chi_j^0$$

E.Ş.ÖMƏROVA

### XÜLASƏ

Minimal Supersimmetrik Standart Model çərçivəsində  $H, h, A$  Hiqq s bozonların çarçino cütünə  $H(h; A) \Rightarrow \chi_i^- \chi_j^+$  və neytralino cütünə  $H(h; A) \Rightarrow \chi_i^0 \chi_j^0$  parçalanma kanalları tədqiq edilmişdir. Çarçino və neytralino pulyarlaşma hallarını nəzərə almaqla, hər bir parçalanma kanalı üçün parçalanma enlərinin ifadələri əldə olunmuşdur və çarçino və neytralino uzununa və eninə pulyarlaşma dərəcələri, eləcə də parçalanma eninin Hiqq s bozonun kütləsindən asılılıqları ətraflı öyrənilmişdir.

**Açar sözlər:** Minimal Supersimmetrik Standart Model, Standart Model, Hiqq s bozon, çarçino, neytralino, spirallıq, parçalanmanın eni.

## РАСПАДЫ ХИГГС БОЗОНОВ $H(h; A) \Rightarrow \chi_i^- \chi_j^+$ , $H(h; A) \Rightarrow \chi_i^0 \chi_j^0$

Э.Ш.ОМАРОВА

### РЕЗЮМЕ

В рамках Минимальной Суперсимметричной Стандартной Модели рассмотрены каналы распада хиггс - бозонов  $H$ ,  $h$  и  $A$  в пару чарджино  $H(h; A) \Rightarrow \chi_i^- \chi_j^+$  и в пару нейтралино  $H(h; A) \Rightarrow \chi_i^0 \chi_j^0$ . С учетом поляризационных состояний чарджино и нейтралино получены аналитические выражения для ширины этих распадов, определены степени продольных и поперечных поляризаций чарджино и нейтралино также как и изучена зависимость ширины распадов от массы хиггс-бозонов.

**Ключевые слова:** Минимальная Суперсимметричная Стандартная Модель, Стандартная Модель, Хиггс бозон, чарджино, нейтралино, спиральность, ширина распада.

UDC 538.95

**ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ЭНЕРГИИ  
НА ОСНОВЕ ГЕТЕРОСТРУКТУРЫ  $n\text{-CuIn}_5\text{S}_8 - p\text{-Si}$** **А.И.БАЙРАМОВА****Азербайджанский Университет Архитектуры и Строительства  
*aynurab18@gmail.com***

*В работе приводятся методы получения и результаты исследования фотоэлектрических свойств гетероструктуры  $n\text{-CuIn}_5\text{S}_8 - p\text{-Si}$ . Определены диапазон энергии fotocувствительности тонких пленок  $n\text{-CuIn}_5\text{S}_8$  и гетероструктуры. Фактор заполнения Вольт-Амперной характеристики освещенной при условии АМ0 составляет 56%.*

**Ключевые слова:** фотоэлектрический преобразователь, гетероструктура,  $\text{CuIn}_5\text{S}_8$ , тонкая пленка,  $n\text{-CuIn}_5\text{S}_8 - p\text{-Si}$ .

**1. Введение**

Поиски высокоэффективных преобразователей возобновляемых энергий являются приоритетными задачами широкой аудитории научных исследователей. Среди возобновляемых энергий большое внимание привлекают солнечная энергия, способная обеспечивать потребность огромной доли необходимой энергии для жизнедеятельности человечества. Количество солнечной энергии, доходящее до поверхности земли равно примерно,  $49,9 \cdot 10^{18}$  Дж в год, что в  $10^4$  раза превосходить нынешние потребности человечества за один год. Теоретический предел максимально-го КПД преобразования солнечной энергии в электрическую составляет около 50%, однако, техническая производительность в современных солнечных батареях составляет от 13 до 17 процентов [1-3]. В кремниевых монокристаллических батареях КПД несколько выше 18-22% [4,5]. Огромные потери в них обусловлены отражением части света от кремниевых пластин и нагревом самой конструкции. Для увеличения эффективности преобразователей используются тандемные элементы, которые полнее используют солнечный спектр. В частности, солнечные элементы на основе кристаллического кремния главным образом эффективно преобразуют инфракрасную часть солнечного излучения в электрическую, в то время как широкозонное соединение, как  $\text{CuIn}_5\text{S}_8$  эффективно преобразовать видимую часть спектра, делая элемент более высокоэффективным. Значение ширины запрещенной зоны монокристаллического  $\text{CuIn}_5\text{S}_8$  оп-

ределены по разными методами в разных работах и требует уточнения. В работе [6] показано, что при комнатной температуре ширина запрещенной зоны, определяемая прямым переходом равна 1,41 эВ, а непрямой переходом – 1,25 эВ.

В данной работе описывается способы изготовления и изучения характеристики тандемного фотоэлемента на основе гетероструктуры  $n\text{-CuIn}_5\text{S}_8\text{-}p\text{-Si}$ .

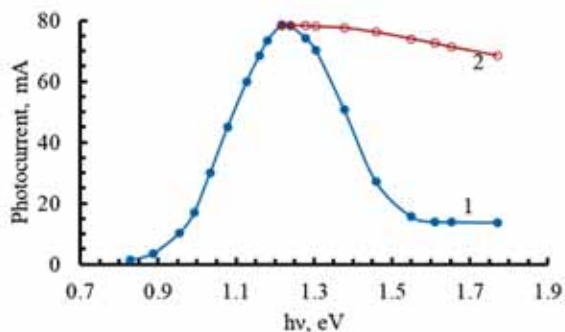
## 2. Техника эксперимента

Соединение  $\text{CuIn}_5\text{S}_8$  было синтезировано непосредственным сплавлением отдельных элементов, взятых в стехиометрических соотношениях, в эвакуированных до давления воздуха 1,33 мПа и запаянных кварцевых ампулах. После синтеза соединения ампула в печи держалась при температуре 1090 °С и периодически подвергалась вибрации ампулы в течении 5 часов, затем она охлаждалось медленно в горизонтальном положении. Извлеченная из ампулы поликристаллический слиток имел однородную состав по всей длине, а на поверхности уго наблюдались четкие равносторонние треугольные фигуры. Полученный слиток обладал  $n$ -типом электропроводностью.

Тонкие пленки  $\text{CuIn}_5\text{S}_8$  на поверхности  $p\text{-Si}$  были получены методом мгновенного термического испарения пылинки в вакууме. При методе мгновенного термического испарения синтезированный кристалл измельчается на пылинки с размерами около 100 мкм и загружается в контейнер специального устройства в вакуумной камере. Лодочный нагреватель нагревается до температуры 1120 °С и на него подается пылинки кристалла. Испаренное вещество осаждается на подложки из кремния и стекла одновременно, Полученные тонкие пленки  $\text{CuIn}_5\text{S}_8$  подвергались спектральному и составному (методом EDAX) анализу.

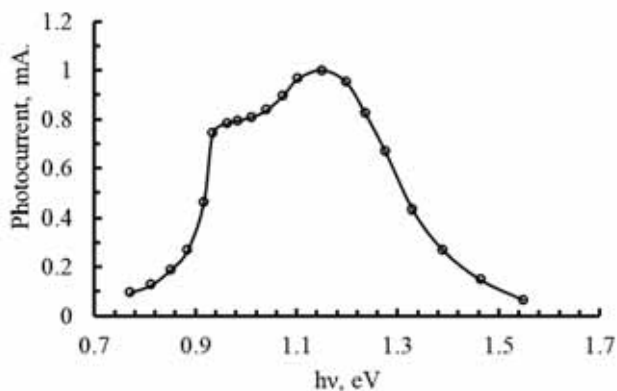
## 3. Измерения и обсуждение результатов

На рис. 1 изображен спектр фототока тонкой пленки  $\text{CuIn}_5\text{S}_8$ , выращенный на стекле. Кривая 1 изображает спектр фототока, экспериментально снятый в стационарном режиме и рассчитанный на единичный фотон. Кривая 2 вычислена теоретически без учета вклада в фототок поверхностной рекомбинации неравновесных носителей тока. Если каким-то образом, например, созданием буферного слоя удастся значительно уменьшить концентрации поверхностных рекомбинационных центров, то можно достигать высокому фоточувствительности  $\text{CuIn}_5\text{S}_8$  в широком диапазоне энергии излучения. Как видно из спектров, тонкие пленки  $\text{CuIn}_5\text{S}_8$  имеют хорошую фоточувствительность в диапазоне энергии волны 0,8...1,8 эВ.



**Рис. 1.** Спектр фототока тонкой пленки  $CuIn_5S_8$ : 1- спектр фототока, экспериментально снятый в стационарном режиме; 2- спектр, вычисленный теоретически без учета вклада в фототок поверхностной рекомбинации.

На рис. 2 представлен спектр фототока тандемного фотоэлемента на основе гетероструктуры  $n-CuIn_5S_8-p-Si$ . Фототок в спектре вычислен на единицу кванта. Спектр охватывает диапазон энергии электромагнитных волн 0,7...1,6 эВ. В данном диапазоне энергии волны находятся частично первое и полностью второе и третье атмосферное окно солнечного излучения.



**Рис. 2.** Спектр фототока фотоэлемента на основе гетероструктуры  $n-CuIn_5S_8-p-Si$ .

Вольт – амперная характеристика гетероструктуры  $n-CuIn_5S_8-p-Si$  при освещении со стороны  $CuIn_5S_8$ , в условии АМ0 представлена на рис. 3. Напряжение холостого хода равно  $V_{oc} = 0,385$  В, а ток короткого замыкания составляет  $I = 6.75$  мА.

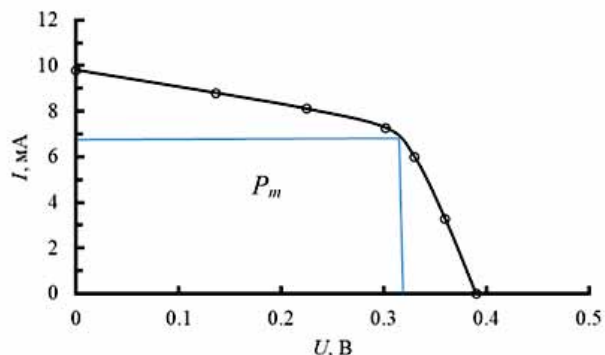


Рис. 3. Вольт – амперная характеристика гетероструктуры  $n\text{-CuIn}_5\text{S}_8\text{-}p\text{-Si}$ .

Фактор заполнения ВАХ составляет 56%. Исходя из этих данных и ссылаясь к работе [7] можно прийти к выводу о том, что данная гетероструктура представляет большой практический интерес для изготовления высокоэффективного преобразователя солнечного излучения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Атрашенко О.С., Сухоручкина Т.Ю. «Солнечные стирлинги» - Перспективы развития. SWorld – Scientific researches and their practical application. modern state and ways of development, 2015, 6 с.
2. Парашук Д.Ю., Кокорин А.И. Современные фотоэлектрические и фотохимические
3. методы преобразования солнечной энергии. Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева), 2008, т. LII, № 6, с. 107-118.
4. Wurfel P. Physics of Solar Cells. Weinheim: Wiley-VCH, 2005.
5. Campoy-Quiles, Mariano; Ferenczi, Toby; Agostinelli, Tiziano; Etchegoin, Pablo G.; Kim, Youngkyoo; Anthopoulos, Thomas D.; Stavrinou, Paul N.; Bradley, Donal D. C.; Nelson, Jenny (2008). Morphology evolution via self-organization and lateral and vertical diffusion in polymer:fullerene solar cell blends. , 7(2), 158–164.
6. Josefa Estévez, Larissa Durán, Elvis Hernández, Jaime Castro, Lisandro Meléndez, José Rafael Fermín y Carlos Alberto Durante Rincón. Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 32, N° 1, 92 - 108, 2009
7. Пионкевич В.А. Аспекты практического применения солнечных установок для электроснабжения промышленных и сельскохозяйственных потребителей. Энергетика, Вестник ИрГТУ № 5 (112) 2016, с. 129-134.

### $n\text{-CuIn}_5\text{S}_8\text{-}p\text{-Si}$ HİTEROQRULUŞ ƏSASINDA ENERJİNİN FOTOELEKTRİK ÇEVRİCİSİ

A.İ.BAYRAMOVA

#### XÜLASƏ

İşdə  $n\text{-CuIn}_5\text{S}_8\text{-}p\text{-Si}$  heteroquruluşunun alınma üsulları və fotoelektrik xassəsinin tədqiqi göstərilmişdir. Heteroquruluşun və  $n\text{-CuIn}_5\text{S}_8$  nazik təbəqənin fotohəssaslığın enerji diapazonu müəyyən edilmişdir. Heteroquruluşun volt-ampere xarakteristikasının doldurulma

faktorunun AM0 şəraitində 56% təşkil etdiyi göstərilmişdir.

**Açar sözlər:** fotoelektrik çevricilər, hiteroquruluş,  $CuIn_5S_8$ , nazik təbəqə,  $n-CuIn_5S_8$  –  $p-Si$

## PHOTOVOLTAIC ENERGY CONVERTERS BASED ON $n-CuIn_5S_8$ – $p-Si$ HETEROSTRUCTURE

A.I.BAYRAMOVA

### SUMMARY

This article presents the methods of obtaining and the results of studying the photoelectric properties of the  $n-CuIn_5S_8$ – $p-Si$  heterostructure. The range of the photosensitivity energy of  $n-CuIn_5S_8$  thin films and heterostructures has been determined. The filling factor of the volt-ampere characteristic of the illuminated one under the condition AM0 is 56%.

**Keywords:** photoelectric converter, heterostructure,  $CuIn_5S_8$ , thin film,  $n-CuIn_5S_8$ – $p-Si$ .

**HİLAMBATIN MOLEKULU FRAQMENTLƏRİNİN  
KONFORMASIYA XÜSUSİYYƏTLƏRİ****G.R.SƏFƏRLİ****Bakı Dövlət Universiteti**  
**gunel.safarli89@gmail.com**

*Hilambatin molekulu struktur xüsusiyyətlərinə və funksional təsirinə görə taxikinin neyropeptidlərinə aiddir. Molekulun fraqmentlərinin stabil konformasiyalarının hesablamaları fraqmentlərin stabil konformasiya vəziyyətlərində ikinci quruluşun lokal elementlərini və fraqmentlərin qalıqlarının daha üstün energetik qarşılıqlı oriyentasiyalarını təyin etməyə imkan verir. Fraqmentlərin alınmış stabil konformasiya vəziyyətlərində qalıqların yan zəncirlərinin əlverişli qarşılıqlı təsirləri və hidrogen rabitələri dəqiqləşdirilmişdir. Hesablamalar göstərir ki, C-sonlu pentapeptid molekulun kənar qruplarının atomları arasında hidrogen rabitələrinin yaranması alfa-spiralın əlverişli enerjilərinə malik olan konformasiyalarını əmələ gətirir. İkiüzlü bucaqların qiymətlərinin hesablanması əsasında hilambatin molekulunun fraqmentlərinin energetik əlverişli konformasiya vəziyyətlərinin visual modeli qurulmuşdur.*

**Açar sözlər:** hilambatin, taxikinin, fraqment, konformasiya, molekulyar mexanika metodu.

**Giriş**

Bioloji fəal taxikinin sinfinə mənsub və on iki amin turşusundan ibarət olan hilambatin molekulu və onun fraqmentləri orqanizmdə bir çox mühüm funksiyaları yerinə yetirən və geniş bioloji təsirlərə malik olan peptidlərdir. Bu peptidlər hamar əzələlərin yığılmasında, ürək-damar sisteminin fəaliyyətində və orqanizmin təzyiqinin tənzimlənməsində damar-genişləndirici və təzyiqi salan təsirlərə malikdir. Eyni zamanda onlar immuntənzimləyici kimi iltihaba və şiş hüceyrələrinin artmasına qarşı fəaliyyət göstərir. Taxikininlərdən fərqli olaraq hilambatin molekulu C-tərəfinin sonunda bioloji fəal L-Met-L-Met dipeptidini daşıyır. Hilambatin qan plazmasında qlükozanın və insulinin səviyyəsini xeyli artırır, canlı orqanizmin karbohidrat metabolizminin tənzimləməsində iştirak edir. Hilambatin molekulunun və onun fraqmentlərin aktivliyinin və spesifikliyinin səbəblərinin müəyyənləşdirilməsi, onların fəza quruluşlarının xüsusiyyətlərinin və elektron quruluşunun atom-molekulyar səviyyəsində tədqiqi nəticəsində mümkündür. Peptid molekulalarının fəza quruluşlarının tədqiqi onların təsir mexanizmlərinin izah olunmasında həlledici rol oynamaqla yanaşı effektiv və yan təsirsiz dərmanların hazırlanmasının da əsasını təşkil edir. Məlumdur ki, peptid molekulun hər bir konformasiyası özünəməxsus elektron parametrlərləri ilə xarakterizə olunur.



## Tədqiqat metodu və nəticə

Verilmiş işdə molekulyar mexanika metodu ilə hilambatin molekulunun ayrı-ayrı fraqmentlərinin konformasiya xüsusiyyətləri tədqiq edilmişdir. Peptidlərin stabil konformasiyaları proqram və potensial funksiyalar sisteminin köməyi ilə hesablanmışdır.

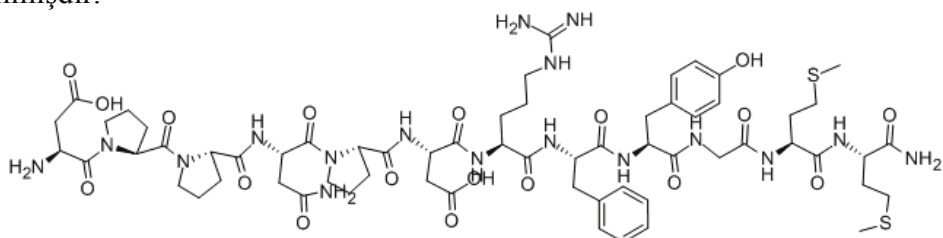
Hilambatin molekulunun fraqmentlərinin stabil konformasiyalarının hesablanmasında qeyri-valent və elektrostatik qarşılıqlı təsir enerjiləri, hidrogen rabitəsi və torsion potensial nəzərə alınmışdır. Potensial funksiyaların parametrizasiyası polyar mühitdə aparılmışdır. Bu mühit üçün dielektrik nüfuzluğunun qiyməti 10 götürülmüşdür. Hidrogen rabitəsi üçün  $r_0=1,8 \text{ \AA}$  olduqda maksimum enerji  $-1,5 \text{ kkal/mol}$  nəzərdə tutulmuşdur.

Molekulun fraqmentlərinin kiçik enerjili konformasiyalarının hesablamalarında peptid quruluşların qəbul olmuş klassifikasiyasından istifadə olunmuşdur. Ayrı-ayrı peptidlərin konformasiyalarının hesablanması əsas zəncirin  $\varphi$  və  $\psi$  ikiüzlü bucaqlarının məlum qiymətləri əsasında variantların seçilməsinin nəticəsində həyata keçirilmişdir. Bu ikiüzlü bucaqlar hər bir monopeptid üçün R, B, L və P konformasiya xəritələrinin kiçik enerjili oblastlarına uyğundur.

Tədqiqat zamanı L-Met-L-Met dipeptid molekulunun konformasiya analizi molekulyar mexanika metodu vasitəsi ilə aparılmışdır. Molekulun potensial enerjisi qeyri-valent (Eq.v.), elektrostatik (Eel.), torsion (Etor.) qarşılıqlı təsir və hidrogen rabitələri (Eh.r.) enerjilərinin additive cəmi şəklində seçilmişdir. Qeyri-valent qarşılıqlı təsir enerjisi Lennard-Consun «6-12» potensialı vasitəsi ilə Skott və Şeraqanın təklif etdiyi parametrlərdən istifadə etməklə hesablanmışdır. Elektrostatik qarşılıqlı təsir enerjisi su mühitini nəzərə almaqla monopol yaxınlaşmada müəyyən edilmişdir.

Hidrogen rabitəsinin enerjisini polyar mühitdə hesablamaq üçün Morze potensialından istifadə olunmuşdur. Konformasiya enerjisinin lokal minimumlarının tapılması üçün universal hesablama proqramından istifadə olunmuşdur. Hər amin turşu qalığının konformasiya vəziyyətini onun əsas zəncirinin  $\varphi$  ( $N-C\alpha$  - ətrafında),  $\psi$  ( $C\alpha-C$  / ətrafında) və yan zəncirinin  $\chi_1, \chi_2, \dots$  ( $C\alpha-C\beta$ ,  $C\beta-C\gamma$ , ...ətrafında) ikiüzlü bucaqlarının qiymətləri xarakterizə edir. Amin turşu qalığının konformasiyası R( $\varphi\psi = 180^\circ \div 0^\circ$ ), B ( $\varphi = -180^\circ-0^\circ$ ,  $\psi = 0^\circ-180^\circ$ ), L ( $\varphi, \psi = 0^\circ-180^\circ$ ), P( $\varphi = 0^\circ-180^\circ$ ,  $\psi = -180^\circ-0^\circ$ ) regionları ilə müəyyən olunur. İşarələrin (R,B,L,P) indeksləri yan zəncirinin vəziyyətini xarakterizə edir : 1 rəqəmi  $\sim 0^\circ \div 120^\circ$ , 2 rəqəmi  $\sim 120^\circ \div -120^\circ$ , 3 rəqəmi  $\sim -120^\circ \div 0^\circ$  sahələrinə uyğundur. İkiüzlü fırlanma bucaqlarının qiymətləndirilməsi IUPAC-IUB nomenklaturasına uyğundur. Dipeptidin elektron enerjiləri, bir sıra enerji xarakteristikaları, elektron sıxlığının paylanması, atomların parsial yükləri, elektrostatik potensialı, elektik dipol momentləri biopolimerlərin elektron quruluşlarının hesablanması üçün hazırlanmış AM1 kvantkimyəvi metodun köməyi ilə və HyperChem 8.1 proqramının nümayiş versiyası ilə tədqiq olunmuşdur. Şəkil 1-də hilambatin molekulunun ilkin strukturu təsvir

edilmişdir.



Şək. 1. Hilambatin peptidinin ilkin strukturu.

Hilambatin fraqmentlərinin konformasiya tədqiqatları fraqmentə daxil olan sərbəst monopeptidlərin kiçik enerjili strukturları əsasında aparılmışdır. Nəzəri hesablama tədqiqatı iki amin turşu qalığından ibarət olan L-Met-L-Met dipeptidinin polyar mühiti üçün (dielektrik sabiti =10) ən stabil konformasiyaları müəyyən edilmişdir. Tədqiqat zamanı hər forma üçün amin turşu qalıqlarının  $\chi_1$  bucağının  $60^\circ$ ,  $180^\circ$  və  $-60^\circ$  qiymətlərinin kombinasiyalarına uyğun yan zəncirlərinin müxtəlif vəziyyətləri nəzərə alınmışdır. Dipeptid molekulu hesablanmış konformasiyalarının nisbi enerjiləri 0-10,5 kkal/mol enerji intervalına düşür. Həmin konformasiyaların içərisində 0-3 kkal/mol enerji intervalına düşən konformasiyalar, onlara qeyri-valent, elektrostatik, torsion qarşılıqlı təsir enerjilərinin verdikləri pay, nisbi enerjiləri cədvəl 1-də göstərilmişdir. Dipeptid fraqmentin mümkün olan fəza quruluşlarını nəzərə almaqla molekulu 100-ə yaxın konformasiyası hesablanmışdır. Nəticədə müəyyən olunmuşdur ki, şeyplər arasında enerjiyə görə diferensiasiya çox cüzdür.

Cədvəl 1

**L-Met-L-Met dipetidinin optimal konformasiyalarının qarşılıqlı təsir qüvvələrinin enerjiləri**

Şeyp	Konformasiya	Enerji payları, kkal/mol				
		$E_{\text{qey-valent}}$	$E_{\text{el}}$	$E_{\text{tors}}$	$E_{\text{ümumi}}$	$E_{\text{nisbi}}$
f	R22R32	-6.8	1.5	0.6	-4.6	0
	R12R32	-5.0	0.9	0.6	-3.8	0.8
	R31R31	-4.9	1.3	0.1	-3.6	1.0
	R32R12	-5.6	1.5	0.2	-3.0	1.6
	B21L32	-4.3	0.9	1.6	-2.2	2.4
e	B21B21	-5.9	0.8	0.6	-4.3	0.3
	B33B32	-5.3	0.9	0.5	-3.9	0.7
	B22B32	-5.1	0.8	0.5	-3.7	0.8
	B22B22	-5.0	0.9	0.5	-3.5	1.1
	L23B23	-4.3	0.9	1.0	-2.3	2.3
	L21B12	-4.4	1.4	0.9	-2.0	2.6

Göründüyü kimi, verilmiş dipeptid peptid zəncirin hər iki şeypini eyniylə stabil olaraq formalaşdırır. Bu şeyplər e-açılmış, f- bükülmüş şeyplərdir. Phe-Tyr-Gly-Met-Met C-sonlu pentapeptidinin konformasiyalarının hesablamaları göstərir ki, fraqmentin ən kiçik enerjili konformasiyaları sağ  $\alpha$ -spiralı for-

malaşdırır. Bu  $\alpha$ -spiralı peptid zəncirin birinci amin turşu qalığının elektromənfi azot atomu ilə beşinci amin turşu qalığının karboksil qrupunun oksigen atomu arasında yaranan molekul daxili qarşılıqlı təsirləri stabilləşdirir. Cədvəl 2.-də hilambatin molekulunun C-sonlu pentapeptid fraqmentinin optimal konformasiyalarının molekul daxili qarşılıqlı təsirlərinin enerji payları təsvir edilmişdir.

Cədvəl 2

**Hilambatin molekulunun C-sonlu pentapeptid fraqmentinin optimal konformasiyalarının molekul daxili qarşılıqlı təsir qüvvələrinin enerjiləri**

№	Konformasiya	Enerji payları, kkal/mol				
		$E_{qey-valent}$	$E_{el}$	$E_{tors}$	$E_{ümumi}$	$E_{nisbi}$
1	R2R3RR21R32	-22,9	4,0	3,0	-16,6	0
2	B2R2RR21R32	-22,7	4,5	4,8	-13,4	3,2
3	R2B2PB22B22	-18,3	3,7	2,3	-12,4	4,2
4	B2B3BB21B21	-15,8	3,7	1,6	-10,5	6,1
5	B2B3RB21B21	-15,7	4,0	1,4	-10,3	6,3
6	B2B1BB21R22	-16,8	3,8	3,1	-9,9	6,7
7	R2B1PL32B32	-15,6	3,8	2,2	-9,7	6,9
8	R2B1LB22R22	-14,5	4,0	1,5	-9,0	7,6
9	B2B2 LR22B22	-14,2	3,9	1,4	-8,8	7,8
10	B2B2PL22B32	-13,3	4,0	1,8	-7,7	8,9
11	R2B1BR21B12	-16,8	4,1	2,6	-7,0	9,6
12	R2B1BB22B22	-15,4	3,7	5,5	-6,1	10,5

0-5 kkal/mol nisbi enerji intervalına  $\alpha$ -spiral strukturlardan başqa, iki tip stabil di- və tripeptid qalıqlararası qarşılıqlı təsirlər əmələ gətirən konformasiyalar düşür. Molekulun pentapeptid fraqmentinin bütün kiçik enerjili konformasiyalarında enerji payının əsasını qeyri-valent qarşılıqlı təsir enerjiləri təşkil edir. Elektrostatik qarşılıqlı təsir enerjiləri isə hidrofob qalıqların üstünlük təşkil etməsinə görə nisbi enerjiyə o qədər də böyük pay vermir. Tirozin və fenilalanin yan zəncirləri böyük olduğundan, fraqmentin effektiv konformasiyalarını əmələ gətirir.

**ƏDƏBİYYAT**

- Güllner H.G, Harris V, Yajima H, Unger R.H. Hylambatin, a structurally unique tachykinin: effects on insulin and glucagon secretion. *Arch. Int. Pharmacodyn. Ther.*, 1984, v.272(2), p.304-309.
- Inoue A, Fukuyasu T, Nakata Y, Yajima H, Nomizu M, Inagaki Y, Asano K, Segawa T., Structure-activity relationship of hylambatin and its fragments as studied in the guinea-pig ileum. *J. Pharm. Pharmacol.*, 1988, v.40(1), p.72-73.
- Popov E.M. Quantitative approach to conformations of proteins, *Int. J. Quant. Chem.*, 1979, v.16, p. 707-737.
- Максумов И.С., Исмаилова Л.И., Годжаев Н.М. Программа полумэмпирического расчёта конформаций молекулярных комплексов на ЭВМ, *Журнал структурной химии*, т.24, №4, 1983, с. 147-148.
- IUPAC-IUB Commission on Biochemical Nomenclature Abbreviations and symbols for description of conformation of polypeptide chains, *Pure Appl. Chem.*, 1974, v. 40, p. 291-306.

6. Pople J.A., Segal G.A., Approximate self-consistent molecular orbital theory. II. Calculations with complete neglect of differential overlap, J.Chem.Phys., 1965, v.43, p.136–149.

## **СТРУКТУРНЫЕ И КОНФОРМАЦИОННЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФРАГМЕНТОВ МОЛЕКУЛЫ ГИЛАМБАТИНА**

**Г.Р.САФАРЛИ**

### **РЕЗЮМЕ**

Молекула гиламбатина по своим структурным особенностям и функциональным действиям относится к тахикининовым нейропептидам. Расчет стабильных конформационных состояний фрагментов молекулы позволил определить локальные элементы вторичной структуры энергетически предпочтительную взаимную ориентацию остатков в стабильных конформационных состояниях фрагментов. В полученных стабильных конформационных состояниях фрагментов были уточнены и энергетически оценены взаимовыгодные взаимодействия боковых цепей остатков и водородные связи. Расчет показал, что С-концевой пентапептид молекулы энергетически предпочтительно формирует алфа-спиральную конформацию, стабилизированную образованием водородных связей между атомами концевых групп. На основе рассчитанных значений двугранных углов были построены визуальные модели энергетически предпочтительных конформационных состояний исследуемых участков молекулы гиламбатина.

**Ключевые слова:** гиламбатин, тахикинин, фрагмент, конформация, метод молекулярной механики.

## **THE STRUCTURAL AND CONFORMATIONAL PARTICULARITIES OF FRAGMENTS OF HYLAMBATIN MOLECULE**

**G.R.SAFARLI**

### **SUMMARY**

The molecule hylambatin on its structured particularities and physiologic functions pertains to tachykinin neuropeptides. The molecule hylambatin on its structured particularities and physiologic functions pertains to tachykinin neuropeptides. The spatial structure and conformational properties of some fragments of hylambatin tachykinin peptide have been investigated by molecular mechanics method. It is known that this molecule has different dipeptide segment L-Met-L-Met at the C-terminus in change from tachykinins. As results of given investigation were determined the conformational properties of some dipeptide, tripeptide, tetrapeptide and pentapeptide fragments of hylambatin. The calculation of stable conformational states of fragments of the molecule has allowed to define the local elements of the secondary structure and energy preferred mutual orientation of residues in stable structures. Calculations showed that C-terminal pentapeptide of hylambatin molecule preferentially adopt the alpha-helical conformation, stabilized by hydrogen bonds between the end groups of molecule. On the base of calculated values of dihedral angles of stable conformations of fragments have been constructed their molecular models.

**Keywords:** hylambatin, tachykinin, fragment, conformation, molecular mechanics method.

**MÜNDƏRİCAT****RİYAZİYYAT**

<b>Mehdiyev M.F., Əliyev N.Ə., Fətullayeva L.F., Xəlilova L.H.</b> Eni vahid olan müstəvi zolaqda birinci tərtib hiperbolik tip tənlik üçün Steklov məsələsi .....	5
<b>Xanməmmədov A.X., Muradov M.F.</b> Modifikasiya olunmuş Bessel funksiyalarının ortoqonallığı haqqında .....	11
<b>Fərəcov A.S.</b> Altı tərtib ikili dispersiyalı Bussinesk tənliyi üçün tərs sərhəd məsələsi .....	16
<b>Sadıqov M.A., Sadıqov A.M.</b> Axtarılan funksiyanın ikinci tərtib törəməsi daxil olan variasiya məsələsi, II .....	27
<b>Həşimova T.E.</b> Ümumiləşmiş avtoregression sxemlə təsvir olunan Markov təsadüfi dəfə dolaşmasının səviyyəsi birinci dəfə kəsmə anları ailəsi haqqında .....	38

**MEXANİKA**

<b>Feyzullayev X.A., Səmədova G.E., Feyzullayeva N.M.</b> Tükənmə rejimli qazkondensat yatağının işlənilmə prosesinin optimallaşdırılması .....	44
---	----

**İNFORMATİKA**

<b>Əlizadə Ü.M.</b> Prediktorun erkən diaqnostikada rolu .....	55
---	----

**FİZİKA**

<b>Əsgərov Ş.Q., Əfəndiyeva İ.M., Abdullayeva L.K., Həsənov M.H., Ağamalıyeva L.F.</b> Şottki baryerli diodlarda metalın mikrostrukturunun dəşilmə mexanizminə təsirinə öyrənilməsi .....	64
<b>Məmmədov Ş.Ə., Allahverdiyeva M.N.</b> ADS/KXD modelində vektor mezonların qravitasiya form faktorları .....	71
<b>Məmmədov R.M.</b> Lazer şüalanmasının təsiri ilə InSe-də qeyri-xətti udma .....	78
<b>Sadıxzadə G.M., Ağayev M.N., Cəfərova N.H.</b> Tutumu dəyişən paylanmış boru boyunca ionlaşma cəbhəsinin yayılması .....	85

<b>Eyvazova Q.M., Orbux V.İ., Lebedeva N.N., Axundov Ç.Q.</b> Dielektrik seolit və keçirici qrafit tozlarının qarışığında keçiriciliyin və dielektrik nüfuzluğunun tədqiqi .....	90
<b>Kərimova A.H., Nuriyeva S.Q., Rəhimli A.M., Şirinova H.A.</b> Qeyri-fermentativ qlükoza sensorları üçün nanoməsaməli elektrodların funksional xarakteristikası.....	99
<b>Ömərova E.Ş.</b> Hiqqs bozonların parçalanma kanalları $H(h; A) \Rightarrow \chi_i^- \chi_j^+$ , $H(h; A) \Rightarrow \chi_i^0 \chi_j^0$ .....	105
<b>Bayramova A.İ.</b> <i>n-CuIn<sub>5</sub>S<sub>8</sub> – p-Si</i> hiteroquruluş əsasında enerjinin fotoelektrik çeviricisi .....	118
<b>Səfərli G.R.</b> Hilambatin molekulu fraqmentlərinin konformasiya xüsusiyyətləri .....	123

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

**Мехтиев М.Ф., Алиев Н.А., Фатуллаева Л.Ф., Халилова Л.Г.**  
 Задача Стеклова для уравнения гиперболического типа  
 первого порядка на плоской полосе ширины единицы ..... 5

**Ханмамедов А.Х., Мурадов М.Ф.**  
 О формуле ортогональности модифицированных  
 функций Бесселя первого рода ..... 11

**Фараджев А.С.**  
 Обратная краевая задача для уравнения Буссинеска  
 шестого порядка с двойной дисперсией ..... 16

**Садыгов М.А., Садыгов А.М.**  
 Вариационная задача содержащая вторые производные  
 неизвестных функций, II ..... 27

**Гашымова Т.Э.**  
 О семействе моментов первого пересечения уровня  
 Марковским случайным блужданием, описываемым  
 обобщенной схемой авторегрессии ..... 38

МЕХАНИКА

**Фейзуллаев Х.А., Самедова Г.Э., Фейзуллаева Н.М.**  
 Оптимизация процесса разработки газоконденсатных залежей  
 в режиме истощения ..... 44

ИНФОРМАТИКА

**Ализаде У.М.**  
 Роль прединдикаторов в ранней диагностике ..... 55

ФИЗИКА

**Аскеров Ш.Г., Эфендиева И.М., Абдуллаева Л.К.,  
 Гасанов М.Г., Агамалиева Л.Ф.**  
 Изучение влияния микроструктуры металла механизм  
 пробоя диодов с барьером Шоттки ..... 64

**Мамедов Ш.А., Аллахвердиева М.Н.**  
 Гравитационные форм факторы векторных мезонов  
 в модели АдС/КХД ..... 71

<b>Мамедов Р.М.</b> Нелинейное поглощение в InSe под действием лазерного излучения.....	78
<b>Садых-заде Г.М., Агаев М.Н., Джафарова Н.Х.</b> Фронт ионизации распространяющийся вдоль трубки с переменной распределённой ёмкостью .....	85
<b>Эйвазова Г.М., Орбух В.И., Лебедева Н.Н., Ахундов Ч.Г.</b> Проводимость и диэлектрическая проницаемость в смесях порошков диэлектрика цеолита и проводника графита .....	90
<b>Каримова А.Г., Нуриева С.Г., Рагимли А.М.</b> Функциональные характеристики нанопористых электродов для неферментативных сенсоров глюкозы.....	99
<b>Омарова Э.Ш.</b> Распады Хиггс бозонов $H(h; A) \Rightarrow \chi_i^- \chi_j^+$ , $H(h; A) \Rightarrow \chi_i^0 \chi_j^0$ .....	105
<b>Байрамова А.И.</b> Фотоэлектрические преобразователи энергии на основе гетероструктуры $n-CuIn_5S_8 - p-Si$ .....	118
<b>Сафарли Г.Р.</b> Структурные и конформационные особенности фрагментов молекулы Гиламбатина .....	123



## CONTENTS

## MATHEMATICS

- Mekhtiyev M.F., Aliyev N.A., Fatullaeva L.F., Khalilova L.H.**  
The Steklov problem for a hyperbolic equation of the first order  
on a plane unit width band ..... 5
- Khanmammadov A.Kh., Muradov M.F.**  
On the orthogonality formula of the modified Bessel functions  
of the first kind ..... 11
- Farajov A.S.**  
Inverse boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation  
with double variance ..... 16
- Sadygov M.A., Sadygov A.M.**  
Variation problem containing second derivatives of unknown functions, II ..... 27
- Hashimova T.E.**  
On the family of first passage times for level by the Markov  
random walk, described by the generalization of the autoregressive on scheme... 38

## MECHANICS

- Feyzullaev Kh.A., Samedova G.E., Feyzullaeva N.M.**  
Optimization of the development of gas condensate deposits  
in the depletion mode ..... 44

## INFORMATIKA

- Alizadeh U.M.**  
The role of predictors in early diagnosis ..... 55

## PHYSICS

- Askerov Sh.G., Afandiyeva I.M., Abdullaeva L.K.,  
Gasnov M.G., Agamalieva L.F.**  
Investigation of the mechanism of breakdown of Schottky diodes  
depending on the metal microstructure ..... 64
- Mamedov Sh.A., Allahverdiyeva M.N.**  
Gravitational Form Factors of Vector Mesons in an AdS/QCD model ..... 71
- Mamedov R.M.**  
Nonlinear absorption in InSe under the action of laser radiation ..... 78

<b>Sadikh - zade G.M., Agaev M.N., Jafarova N.H.</b> Front of ionization of a variable distributed capacity spreading into a tube.....	85
<b>Eyvazova G.M., Orbukh V.I., Lebedeva N.N., Akhundov Ch.G.</b> Conductivity and dielectric constant in mixtures of zeolite dielectric powders and graphite conductor .....	90
<b>Karimova A.H., Nuriyeva S.G., Rahimli A.M.</b> Functional characteristics of nanoporous electrodes for non-enzymatic glucose sensors.....	99
<b>Omarova E.Sh.</b> The decay channels of Higgs bosons $H(h; A) \Rightarrow \chi_i^- \chi_j^+$ , $H(h; A) \Rightarrow \chi_i^0 \chi_j^0$ .....	105
<b>Bayramova A.I.</b> Photovoltaic energy converters based on n-CuIn5S8–p-Si heterostructure.....	118
<b>Safarli G.R.</b> The structural and conformational particularities of fragments of hylambatin molecule.....	123